تُقدم
سلسلة رِفعَة

قوانين الرياضيات

للمراحل التعليمية

مجموعة رِفعة الرياضيات
تطوير - إنتاج - توثيق

تأليف

نخبة من المعلمين والمعلمات

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

خالق الكون معلم الإنسان ما لم يعلم، والصلاة والسلام على رسولنا محمد عليه أفضل الصلاة وأتم التسليم.

يسر مجموعة رفعة الرياضيات أن تقدم كتاب "قوانين الرياضيات" حيث أنه يعتبر الإصدار السابع من سلسلة كتب أصدرتها المجموعة.

الكتاب يعتبر مرجع شامل لقوانين الرياضيات، قد يظن البعض بأن هذا الموضوع متكرر وسبق طرحه في كثير من الأعمال، ولكن الذي يميز كتابنا، السهولة والمتعة والتنظيم الذي يساعد على وصول المعلومة وترسيخها.

عمل على إصدار هذا الكتاب نخبة من معلمي ومعلمات الرياضيات في المملكة العربية السعودية، وكان هذا الكتاب ثمرة جهد تلك العقول النيرة.

الهدف من طرح الكتاب هو إثراء الساحة العلمية وخاصة تخصص الرياضيات بأعمال من صنع المعلمين والمعلمات أنفسهم، حيث أنهم الأقرب للميدان التعليمي والأكثر ممارسة والأعلم بطرق التدريس وتوصيل المعلومة ببراعة وإتقان.

مجموعة رفعة: هي مجموعة تضم الكثير من معلمي ومعلمات الرياضيات، جمعتهم مواقع التواصل الاجتماعي، وكونوا فريقا منظما يهدف إلى إثراء الساحة التعليمية بالمواد العلمية من كتب وبحوث وعروض والكثير من الأعمال التي تهم المعلم والطالب.

هدف المجموعة: تبادل الخبرة وتنوع طرق التدريس، ومساعدة المعلمين والمعلمات على إنتاج الكتب والبحوث والتشجيع على الإنتاج المعرفي وتوثيق النشر وتنظيمه، لكي يرجع بالفائدة على المعلم نفسه والساحة التعليمية بشكل أوسع.

حسابات مجموعة رفعة الرياضيات

الدورات التدريبية | YouTube | المكتبة الرقمية | Twitter | Snapchat | Instagram

المؤلفين

أ/ نورة محمد عبدالله الحناكي	أ/ عمر عبد العزيز العقيل
أ/ جواهر حمدان ملوح العنزي	أ/ هبه عبدالله بخيت الزهراني
أ/ ابتسام عاتق أحمد الطاهري	أ/ محمد علي أحمد الشواف
أ/ علياء عبدالله سعيد آل غنوم	أ/ اماني عبدالله غازي العنزي
أ/ ندى محمد عبدالعزيز الناصر	أ/ نورة عبدالرحمن عبدالعزيز العليان
أ/ هناء أحمد غرم الله الحمراني	أ/ محمد عبد الله علي الثبيتي
أ/ نورة علي عوض الحربي	أ/ عواطف سليم لافي الجهني
أ/ هياء ناصر محمد الجنوبي	أ/ هدى عبدالله الغفيص
أ/ سارة إبراهيم عيد العلي	أ/ عبدالرحمن سامر اليزيدي
أ/ شيمة يوسف نافع الحربي	أ/ روحية عبيد الله عليان السلمي
أ/ هند علي محمد العديني	أ/ نوفاء عقيل الحربي
أ/ أشواق محمد أحمد الغامدي	أ/ فاطمة أحمد محمد القرني

رقم الإيداع	التاريخ	الردمك
1442/3218		978– 603– 03 – 6409 –1
1442/3217	1442/04/29هـ	978– 603– 03 – 6408 –4
1442/3237		978– 603– 03 – 6412 –1
1442/3146		978– 603– 03 – 6318 –6
1442/3144		978– 603– 03 – 6317 –9
1442/3142	1442/04/28هـ	978– 603– 03 – 6316 –2
1442/3139		978– 603– 03 – 6315 –5
1442/3050	1442/04/24هـ	978– 603– 03 – 6308 –7
1442/3050		978– 603– 03 – 6307 –0

الأقسام

نظرية الأعداد

الجبر

الهندسة

حساب المثلثات

الإحصاء

التركيبات

للذهاب إلى الفهرس اضغط هنا

نظرية الأعداد

فرع من فروع الرياضيات تهتم بدراسة خصائص الأعداد بشكل عام، و بالأعداد الصحيحة بشكل خاص. وتدرس نظرية الأعداد قابلية القسمة والتحليل إلى عوامل أولية.

• الأعداد الصحيحة.. خواصها والعمليات عليها

تتكون مجموعة الأعداد الصحيحة من

مجموعة الأعداد الطبيعية (الأعداد الموجبة) و الصفر والأعداد السالبة. ويرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{0 , \pm 1 , \pm 2 , \pm 3, \dots \dots \dots\}$$

خواص الأعداد الصحيحة لكل $a , b , c \in \mathbb{Z}$ فإن

	الخاصية	عملية الجمع	عملية الضرب
①	الانغلاق	$a + b \in \mathbb{Z}$	$a.b \in \mathbb{Z}$
②	الإبدال	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
③	التجميع	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
④	العنصر المحايد	$a + 0 = 0 + a = a$	$a \times 1 = 1 \times a = a$
⑤	النظير	$a + (-a) = (-a) + a = 0$	$a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$
⑥	التوزيع	$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ $(b + c) \times a = ba + ca$	

نظريات:

لكل $a , b, c \in \mathbb{Z}$ فإن

✱	$a . 0 = 0 . a = 0$	✱	$(-a).(-b) = ab$
✱	$(-a) \times b = a \times (-b) = -(ab)$	✱	$-(-a) = a$
✱	$b - a \in \mathbb{Z}^+$ إذا كان $a < b$	✱	$b - a \in W$ إذا كان $a \le b$ حيث $N = \{1 , 2 , 3 , 4 , \dots\dots\}$
✱	إذا كان $a < b , b < c$ فإن $a < c$	✱	إذا كان $a < b , c > 0$ فإن $ac < bc$ إذا كان $a < b , c < 0$ فإن $ac > bc$
✱	$\|a\| \ge 0$	✱	$\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
✱	$-\|a\| \le a \le \|a\|$	✱	$\|-a\| = \|a\|$
✱	$\|ab\| = \|a\|\|b\|$	✱	$\|a\| \le b \Leftrightarrow -b \le a \le b$
✱	$\|a + b\| \le \|a\| + \|b\|$	✱	$\|a - b\| \ge \|a\| - \|b\|$
✱	إذا كان $a , b, c \in \mathbb{Z}$ فواحده فقط من العبارات التالية صحيحة إما $a > b$ أو $a < b$ أو $a = b$		

قاعدة الإشارات					
الجمع والطرح:			الضرب والقسمة:		
الإشارات	القاعدة	مثال	الإشارات	الناتج	مثال
متشابه	نجمع بنفس الإشارة	$3+4=7$ $-3-4=-7$	متشابه	موجب	$3\times4=12$ $(-3)\times(-4)=12$ $\frac{-12}{-4}=3$ $\frac{12}{4}=3$
مختلفة	نطرح بإشارة الأكبر عدديا	$3-4=-1$ $-3+4=1$	مختلفة	سالب	$3\times(-4)=-12$ $-3\times4=-12$ $\frac{-12}{4}=-3$ $\frac{12}{-4}=-3$

خطوات ترتيب العمليات الحسابية:

1) تبسيط العمليات داخل الأقواس.
2) الأسس و الجذور.
3) إجراء عملية الضرب أو القسمة بالترتيب من اليسار إلى اليمين.
4) إجراء عملية الجمع أو الطرح بالترتيب من اليسار إلى اليمين.

أمثلة

ناتج المقدار: $72 \div 2^3 - 4 \times 2$

$$= (72 \div 8) - 8$$
$$= 9 - 8 = 1$$

ناتج المقدار: $5 + [(3-4) - (7-5)^2] \times 7$

$$= 5 + [-1 - 4] \times 7$$
$$= 5 + (-5) \times 7$$
$$= 5 - 35$$
$$= -30$$

• قابلية القسمة

يقبل العدد الصحيح a القسمة على العدد الصحيح غير الصفري b ونرمز بالرمز $b|a$

إذا كان a مضاعف صحيح للعدد b أي إذا وجد $a=bc$ حيث إن c عدد صحيح

يقبل القسمة على	الشرط
2	إذا كان آحاده زوجيا
3	إذا كان مجموع المنازل يقبل القسمة على 3
4	إذا كان آخر منزلتين من العدد (الآحاد والعشرات) تقبل القسمة على 4 أو إذا كان العدد في منزلة الآحاد والعشرات معاً يقبل القسمة على 4
5	إذا كان آحاده صفراً أو 5
6	إذا كان يقبل القسمة على 2 و 3 معاً
7	إذا كان ضعف رقم آحاده منقوص منه باقي الرقم من مضاعفات العدد 7
8	إذا كان آخر ثلاث منازل تقبل القسمة على 8
9	إذا كان مجموع المنازل يقبل القسمة على 9
11	ناتج جمع المنازل الزوجية – ناتج جمع المنازل الفردية = صفر أو عدد يقبل القسمة على 11
13	عند ضرب آحاد العدد في الرقم 9 ثم طرح الناتج من باقي الرقم يعطي صفر أو من مضاعفات العدد 13

مثال

تحقق من قابلية القسمة للعدد 1369808 على كلا من

2 , 3 , 4 , 5, 6, 8, 9, 11

(2)	العدد يقبل القسمة على 2 لأن آحاده 8 زوجي
(3)	العدد لا يقبل القسمة على 3 لأن مجموع منازله $1+3+6+9+8+0+8=35$ لا يقبل القسمة على 3
(4)	العدد يقبل القسمة على 4 لأن العدد المكون من آحاده وعشراته يقبل القسمة على 4
(5)	العدد لا يقبل القسمة على 5 لأن آحاده ليس صفرا أو خمسة
(6)	العدد لا يقبل القسمة على 6 لأنه لا يقبل القسمة على 3
(8)	العدد يقبل القسمة على 8 لأن آحاده وعشراته ومئاته 808 يقبل القسمة على 8
(9)	العدد لا يقبل القسمة على 9 لأن مجموع منازله $1+3+6+9+8+0+8=35$ لا يقبل القسمة على 9
(11)	العدد يقبل القسمة على 11 لأن $(1+6+8+8)-(3+9+0)=11$ يقبل القسمة على 11

للعودة إلى محتويات نظرية الأعداد

اضغط هنا

• تصنيف الأعداد

الأعداد الزوجية	هي مجموعة الأعداد الصحيحة التي يمكن كتابتها على الصورة: $2n$ ، حيث $n \in Z$ العدد الزوجي: هو الذي يكون آحاده أحد الأرقام التالية: $0, 2, 4, 6, 8$ $\{\dots, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$
الأعداد الفردية	هي مجموعة الأعداد الصحيحة التي يمكن كتابتها على الصورة: $2n+1$ ، حيث $n \in Z$ العدد الفردي: هو الذي يكون آحاده أحد الأرقام التالية: $1, 3, 5, 7, 9$ $\{\dots, -9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$
الأعداد الأولية	هي الأعداد الموجبة التي لها قاسمين (عاملين) موجبين فقط الواحد والعدد نفسه. مثال: $3 = 3 \times 1$ أعداد أولية فردية، وهي: $3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots$ العدد الأولي الزوجي هو: 2
خصائص الأعداد الأولية	ليكن: p عدد أوليًا، و$a, b \in Z$ عندئذ: 1) إذا كان: $p\|ab$ ، فإن: $p\|a$ أو $p\|b$. 2) كل عدد صحيح $n > 1$ له قاسم أولي. 3) كل عدد صحيح مؤلف: $n > 1$ له قاسم أولي: p بحيث: $p \leq \sqrt{n}$ 4) يوجد عدد لا نهائي من الأعداد الأولية. تذكر أن: من الخاصية الثالثة يمكننا اختبار أولية العدد n : خصوصًا إذا كان صغيرًا، وذلك بإيجاد أقرب عدد صحيح لجذر: $\sqrt{n}$ ، ثم دراسة الأعداد الأولية التي أصغر من جذر العدد ، فإذا كانت تقسم العدد أو أحدهما على الأقل، فالعدد غير أولي، وإن لم تقسم ، فالعدد أولي.
الأعداد المؤلفة	هي التي لها أكثر من قاسمان (عاملان) أي أعداد غير أولية. مثال: $12 = 12 \times 1$ $12 = 6 \times 2$ $12 = 4 \times 3$ 12 عدد مؤلف.
الجمع	مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي. مجموع عددين زوجيين هو عدد زوجي. مجموع عدد زوجي مع عدد فردي هو عدد فردي.
الضرب	حاصل ضرب عددين فرديين هو عدد فردي. يكون حاصل ضرب عددين زوجيًا إذا كان أحدهما على الأقل زوجي.

للعودة إلى محتويات نظرية الأعداد
اضغط هنا

• القاسم المشترك الأكبر (G.C.D)

تعريفه: هو أكبر عدد يقسم عددين أو أكثر معًا بدون باق.

طريقة إيجاده:

1) **التحليل إلى العوامل الأولية:**

نحلل الأعداد إلى عواملها الأولية ثم نأخذ العوامل المشتركة فقط ذات الأس الأصغر.

مثال

القاسم المشترك الأكبر للعددين 16 , 12

$$12 = 6 \times 2 = 2 \times 3 \times 2 = 2^2 \times 3$$

$$16 = 4 \times 4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$$

$$G.C.D = 2^2 = 4$$

2) **خوارزمية إقليدس :**

خوارزمية إقليدس في نظرية الأعداد هي خوارزمية لحساب القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين ، تظهر أهميتها الأساسية في عدم حاجتنا لتحليل الرقمين كي نتمكن من حساب القاسم المشترك الأكبر لهما .

نقوم بقسمة العدد الأكبر على العدد الأصغر ، ثم نقسم المقسوم عليه على الباقي ونكرر العملية إلى انعدام الباقي ، آخر باقي قبل الصفر هو القاسم المشترك الأكبر للعددين

مثال

القاسم المشترك الأكبر للعددين 198 , 252

	1			3			1			2
198	252	→	54	198	→	36	54	→	18	36
	198			162			36			36
	54			36			18			0

$G.C.D = 18$

عند انعدام الباقي يكون القاسم المشترك الأكبر آخر باقي قبل الصفر.

3) الطرح المكرر:

نقوم بطرح العدد الأصغر من الأكبر، ثم نطرح المطروح والناتج من بعضهما حسب الأكبر منهما،
آخر ناتج قبل الصفر هو القاسم المشترك الأكبر.

مثال

القاسم المشترك للعددين 198 , 252

$$252 - 198 = 54$$
$$198 - 54 = 144$$
$$144 - 54 = 90$$
$$90 - 54 = 36$$
$$54 - 36 = 18$$
$$36 - 18 = 18$$
$$18 - 18 = 0$$

قاعدة عامة :

إذا كان $a < b$ حيث إن $a , b \in Z^{+}$ فإن

$$G.C.D(a, b) = G.C.D(a, b - a)$$

النظرية الأساسية للحساب

تنص النظرية على انه أي عدد صحيح له على الأقل عامل أولي

مثلاً: $30 = 2 \times 3 \times 5$ $\quad 144 = 4^2 \times 3^2$ $\quad 50 = 5^2 \times 2$

أفضل طريقة لإيجاد القواسم الأولية هي التحليل إلى عوامل.

للعودة إلى محتويات نظرية الأعداد
اضغط هنا

• المضاعف المشترك الأصغر (L.C.M)

تعريفه: هو أصغر عدد صحيح مضاعف لكلا العددين.

طريقة إيجاده:

1) التحليل إلى العوامل الأولية:

نحلل الأعداد إلى عواملها الأولية ثم نأخذ العوامل المشتركة ذات الأس الأكبر والغير مشتركة.

مثال

المضاعف المشترك الأصغر للعددين: 12 , 16

$$12 = 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$$

$$16 = 4 \times 4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$$

$$L.C.M = 2^4 \times 3 = 48$$

العلاقة بين العددين والقاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر.

إذا كان لدي عددين طبيعيين فإن

$$GCD(a , b) \times LCM(a , b) = a \times b$$

مثال: أوجد $LCM(21 , 18)$

الحل: $\because GCD(21, 18) = 3$ فإن

$$LCM(21, 18) = \frac{21 \times 18}{3} = 126$$

للعودة إلى محتويات نظرية الأعداد
اضغط هنا

• التطابقات

القسمة الخوارزمية:

المقسوم = المقسوم عليه × خارج القسمة + الباقي

$$\boxed{a \equiv b \ (\,mod\ n\,)}$$

المقسوم   الباقي   المقسوم عليه

مثال: $16 \equiv 2 \ (\,mod\ 7\,)$

إذا كان $a, b, n, k \in Z$، فإن:

$$a \equiv b \ (\,mod\ n\,) \Leftrightarrow n|\,(a-b) \Leftrightarrow a \equiv b + kn$$

باقي قسمة a على n يساوي باقي قسمة b على n

خصائص التطابقات	
الخاصية	**مثال**
$a + c \equiv b + c \ (mod\ n)$	$16 + 3 \equiv 2 + 3 \ (\,mod\ 7\,)$
$a - c \equiv b - c \ (mod\ n)$	$16 - 3 \equiv 2 - 3 \ (\,mod\ 7\,)$
$ac \equiv bc \ (mod\ n)$	$16(3) \equiv 2(3) \ (\,mod\ 7\,)$
$\frac{a}{c} \equiv \frac{b}{c} (mod\ n)$	$\frac{16}{3} \equiv \frac{2}{3} \ (\,mod\ 7\,)$
$a^k \equiv b^k \ (mod\ n)$	$16^2 \equiv 2^2 \ (\,mod\ 7\,)$
إذا كان الباقي أقل من المقسوم عليه فإنها قسمة إقليدية.	

• منزلة الآحاد

استراتيجية منزلة الآحاد تظهر أهميتها في مسائل الاختيار متعدد بحيث....	
جمع عددين	• نجمع آحاد كلا من العددين • مثال: حدد منزلة الآحاد لحاصل جمع العددين 38456 + 3249 • الحل: نجمع منزلة الآحاد لكل منهما 6+9 = 15 • فتكون منزلة الأحاد تساوي 5
ضرب عددين	• نضرب آحاد كلا من العددين • مثال: حدد منزلة الآحاد لحاصل ضرب العددين 38456 × 3249 • الحل: نضرب منزلة الآحاد لكل منهما 6×9 = 54 • فتكون منزلة الأحاد تساوي 4
مربع عدد	• بضرب آحاد العدد بنفسه • منزلة الآحاد للأعداد المربعة الكاملة ممكن أن تكون 0,1,4,5,6,9 • بينما الأعداد 2 ,3,7,8 لا يمكن أن تكون آحادا لأي عدد مربع كامل
قوى عدد	• سلوك آحاد الأعداد عند رفعها لأي قوى سنرى أنها لا تخرج عن ثلاث حالات كالتالي

حالات سلوك الأعداد عند رفعها لأي قوى	
الحالة الأولى	الأعداد التي آحادها 1,5،6 عند رفعها لأي قوى فإن منزلة الآحاد تبقى كما هي. آحاد 1355^{94} هو 5 - آحاد $(81001)^{31}$ هو 1 - آحاد $(41376)^{308}$ هو 6
الحالة الثانية	الأعداد التي آحادها 4 ، 9 فإنها تتكرر بالتناوب. العدد الذي آحاده 4 عند رفعه لقوى فرديه فإن آحاد العدد 4 أما إذا كانت القوى زوجية فإن آحاد العدد 6. العدد الذي آحاده 9 عند رفعه لقوى فرديه فإن آحاد العدد 9 أما إذا كانت القوى زوجية فإن آحاد العدد 1.
الحالة الثالثة	الأعداد التي آحادها 2,3,7,8 هذه بالفعل تتطلب قليل من التفكير يُدرس سلوك الأعداد عند رفعها. الأعداد 2,3,7,8 نلاحظ أن منزلة الآحاد تتكرر بشكل د ائري.

العدد 2 دورة آحاده هي: 2 – ، 4 – ، 8 – ، 6 ...	لإيجاد آحاد العدد 652^{39} نقسم قوى العدد على 4 (مقدار دورة قوى العدد 2) فنلاحظ أن الباقي 3 وهذا يمثل العدد الثالث في الدورة، وبالتالي آحاد العدد 652^{39} هو 8.
العدد 3 دورة آحاده هي: 3– ، 9 – ، 7 – ، 1 ...	لإيجاد آحاد العدد 983^{61} نقسم قوى العدد على 4 (مقدار دورة قوى العدد 3) فنلاحظ أن الباقي 1 وهذا يمثل العدد الأول في الدورة، وبالتالي آحاد العدد 983^{61} هو 3.
العدد 7 دورة آحاده هي: 7– ، 9 – ، 3 – ، 1 ...	لإيجاد آحاد العدد 777^{102} نقسم قوى العدد على 4 فنلاحظ أن الباقي 2 وهذا يمثل العدد الثاني في الدورة، وبالتالي آحاد العدد 777^{102} هو 9.
العدد 8 دورة آحاده هي: 8 – ، 4 – ، 2 – ، 6 ...	لإيجاد آحاد العدد 588^{777} نقسم قوى العدد على 4 فنلاحظ أن الباقي 1 وهذا يمثل العدد الأول في الدورة، وبالتالي آحاد العدد 588^{777} هو 8.

للعودة إلى محتويات نظرية الأعداد
اضغط هنا

• مبدأ الاستقراء الرياضي

هو أحد أنواع البرهان الرياضي المتعلقة بالأعداد الطبيعية
الهدف من الاستقراء الرياضي هو إثبات صحة عبارة ما قد تكون مساواة أو عبارة تقبل القسمة على عدد ما

خطوات مبدأ الاستقراء الرياضي	1	برهان أن الجملة صحيحة عندما n = 1
	2	فرضية الاستقراء وهي افتراض أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي k.
	3	برهن أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي التالي k+1.

مجاميع مشهورة تم أثبات صحتها باستخدام مبدأ الاستقراء الرياضي

*	$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=1+3+5+\cdots\ldots+(2n-1)=n^2$	مجموع n من الأعداد الفردية
*	$\sum_{i=1}^{n} i=1+2+3+\cdots\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$	مجموع n من الأعداد الطبيعية
*	$\sum_{i=1}^{n} i^2=1^2+2^2+3^2+\cdots\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	مجموع n مربعات الأعداد الطبيعية
*	$\sum_{i=1}^{n} i^3=1^3+2^3+3^3+\cdots\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$	مجموع n من مكعبات الأعداد الطبيعية
*	$\sum_{i=m}^{n} x=(n-m+1)x$	عندما تكون البداية m حيث $m>1$
*	$\sum_{i=m}^{n} i=\frac{(n-m+1)(n+m)}{2}$	

قاعدة مهمة

إذا كان a,b عددان متتاليان فإن $a^2 - b^2 = a + b$

مثال

للقاعدة السابقة (من كتاب الخطوة الأولى إلى أولمبياد الرياضيات): احسب

$$1439^2 - 1438^2 + 1437^2 - 1436^2 \ldots \ldots . +3 - 2 + 1$$

$$1439^2 - 1438^2 = (1439 + 1438)(1439 - 1438) = 1439 + 1438$$

$$S = 1439^2 - 1438^2 + 1437^2 - 1436^2 \ldots \ldots . +3 - 2 + 1$$

$$S = 1439 + 1438 + 1437 + 1436 + 3 + 2 + 1$$

ونستطيع إيجاد المجموع باستخدام قانون المجموع

$$\frac{1439 \times 1440}{2}$$

محتويات قسم الجبر	
حل المعادلات	الدرجة الأولى – الدرجة الثانية - الدرجة الثالثة - الدرجة الرابعة -القانون العام والمميز
التبرير والبرهان	- التبرير (الاستنتاجي ، الاستقرائي المنطق) - المسلمات الهندسية - تعريفات مهمة عن البراهين -أنواع البراهين(المباشر – غير المباشر- البرهان باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضي) -أشكال عرض البراهين (الحر –العكسي – الجبري ذو العمودين- التسلسلي –الإحداثي)
الدوال الرئيسية(الأم)	الدالة (الثابتة – المحايدة – التربيعية – التكعيبية – الجذر التربيعي – المقلوب – القيمة المطلقة – أكبر عدد صحيح الدرجية)
الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية	-التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية والعكس -اللوغاريتمات العشرية – الخصائص الأساسية للوغاريتمات
المتجهات	مقدمة في المتجهات – إيجاد المحصلة - المتجهات في المستوى الإحداثي-المتجهات في الفضاء -الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى - الضرب الداخلي في الفضاء
الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة	-تحويل الإحداثيات القطبية إلى الأحداثيات الديكارتية - تحويل معادلة قطبية إلى معادلة ديكارتية -تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية - تمثيل نقطة في المستوى القطبي ( ) -الأعداد المركبة ونظرية ديموافر -العمليات على الأعداد المركبة
المتباينات والدوال	-مجموعة الأعداد الحقيقية وخواصها - تبسيط العبارات الجبرية - التمثيلات المتعددة للعلاقات والدوال -الدوال المتعددة التعريف - المتباينة الخطية - تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانياً -حل أنظمة المتباينات الخطية بيانياً - إيجاد رؤوس منطقة الحل - البرمجة الخطية والحل الامثل - إيجاد الحل الأمثل
المصفوفات	أنواع المصفوفات-العمليات على المصفوفات – المحددات - المعكوس الضربي للمصفوفة -حل نظام معادلتين باستخدام المحددات (قاعدة كرامر) -حل نظام معادلتين باستخدام المصفوفات (النظير الضربي) -إيجاد مساحة المثلث باستخدام المصفوفات
العلاقات والدوال العكسية والجذرية	العلاقة العكسية - الدالة العكسية - تمثيل دالة الجذر التربيعي - تمثيل متباينة الجذر التربيعي
العلاقات والدوال النسبية	ضرب العبارات النسبية وقسمتها - جمع العبارات النسبية وطرحها - تمثيل دالة المقلوب بيانياً تمثيل الدوال النسبية بيانياً - حل المعادلات النسبية - حل المتباينات النسبية - دوال التغير
المتتابعات والمتسلسلات	المتسلسلات الهندسية اللانهائية إيجاد المفكوك(مثلث باسكال – نظرية ذات الحدين)

• المعادلات

حل المعادلات

الدرجة الأولى

$$9x + 1 = 7$$

$$3x + 2 = 5x + 3$$

$$4(6x + 5) = 8$$

$$\frac{3}{x + 3} = 1$$

$$|x + 6| = 9$$

الدرجة الثانية

حدين: إما أن نأخذ الجذر التربيعي للطرفين أو بأخذ العامل المشترك

$$x^2 + 2x = 0$$

بأخذ x عامل مشترك

$$x[x + 2] = 0$$

$$x = 0$$

أو

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$$

$$x = \pm 2$$

$$x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = -4$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-4}$$

$$x = \pm\sqrt{-4} = \pm\sqrt{4}i$$

$$x = \pm 2i$$

٣حدود : التحليل ، إكمال المربع، القانون العام

$$x^2 + 12x + 32 = 0$$

بالتحليل نبحث عن عددين حاصل ضربهم 32 وجمعهم 12

$$(x + 4)(x + 8) = 0$$

$$x = -4 , x = -8$$

بالقانون العام

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(1)(32)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 128}}{2}$$

$$\frac{-12 \pm \sqrt{16}}{2} =$$

$$= \frac{-12 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{-12 + 4}{2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-12 - 4}{2} = -8$$

حل المعادلات

الدرجة الثالثة

حدين: إما أن نأخذ x عامل مشترك أو باستخدام [الفرق بين مكعبين، مجموع مكعبين]

$$x^3 + 2x = 0$$
$$x[x^2 + 2] = 0$$
$$x = 0$$
$$x^2 = -2 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{-2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}i$$
$$x^3 - 8 = 0$$

نستخدم التحليل

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$
$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$
$$(x^2 + 2x + 4) = 0$$

نستخدم القانون العام

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}\,i}{2} = -1 \pm \sqrt{2}\,i$$

أكثر من حدين: عامل مشترك ليس دائما

$$3x^3 - x^2 + 9x - 3 = 0$$
$$x^2[3x - 1] + 3[3x - 1] = 0$$
$$(3x - 1)(x^2 + 3) = 0$$
$$3x - 1 = 0 \quad \text{أو} \quad x^2 = -3$$
$$x = \frac{1}{3} \qquad x = \pm\sqrt{3}i$$

الدرجة الرابعة

حدين: بأخذ الجذر التربيعي على مرحلتين

$$x^4 - 1 = 0$$
$$\Rightarrow x^4 = 1$$
$$\sqrt{x^4} = \sqrt{1}$$
$$\Rightarrow x^2 = \pm 1$$
$$x^2 = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{1} \Rightarrow x = \pm 1$$
$$x^2 = -1 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{-1} \Rightarrow x = \pm i$$
$$x^4 + 1 = 0$$
$$\Rightarrow x^4 = -1$$
$$\sqrt{x^4} = \sqrt{-1}$$
$$\Rightarrow x^2 = \pm i$$
$$x^2 = i \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{i} \Rightarrow x = \pm\sqrt{i}$$
$$x^2 = -i \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{-i} \Rightarrow x = \pm\sqrt{i}\sqrt{-1} = \pm i\sqrt{i}$$

اكثر من حدين ، ٣ حدود [نتحول للصيغة التربيعية ان امكن أو نبحث عن الجذور ونحلل بنظرية العوامل

$$18x^4 - 21x^2 + 3 = 0$$
$$u = 3x^2$$
$$2(3x^2)^2 - 7(3x^2) + 3 = 0$$
$$2u^2 - 7u = 0$$

تحل بالقانون العام

القانون العام والمميز

لحل المعادلة التربيعية

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \cdots a \neq 0$$

بالقانون العام لابد أن يكون في الصورة القياسية

معامل $a = x^2$

معامل $b = x$

الحد الثابت $c =$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال: باستعمال القانون العام حل المعادلة

$$x^2 - 6x - 10$$

$$x^2 - 6x - 10 = 0$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(-10)}}{2(1)}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 + 40}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{76}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{19}}{2} = 3 \pm \sqrt{19}$$

لتحديد عدد جذور معادلة تربيعية نوجد المميز

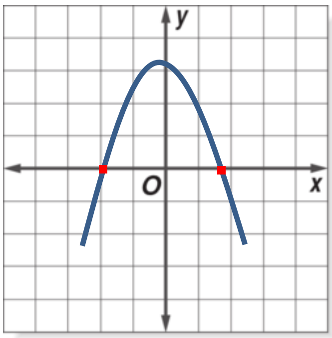
$$b^2 - 4ac$$

$b^2 - 4ac > 0$ موجب

للمعادلة جذران حقيقيان

نسبيان إذا كان المميز مربعا كاملا

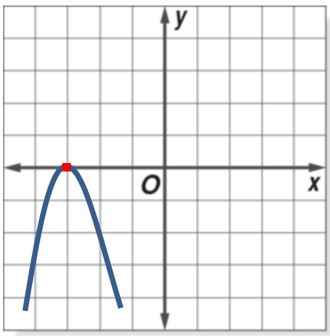
غير نسبيان إذا كان المميز ليس مربعا كاملا



يقطع محور x في نقطتين

$b^2 - 4ac = 0$

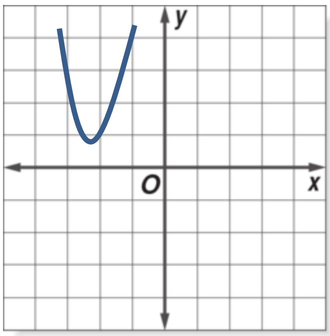
للمعادلة جذر حقيقي مكرر مرتين



يمس محور x في نقطة

$b^2 - 4ac < 0$ سالب

للمعادلة جذران مترافقان



لا يقطع محور x

للعودة إلى محتويات قسم الجبر
اضغط هنا

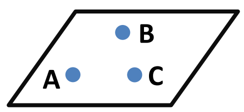
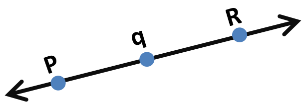
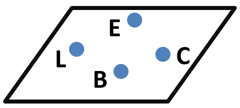
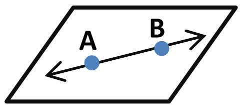
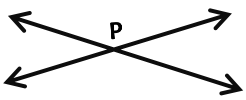
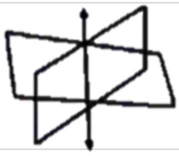
• التبرير والبرهان

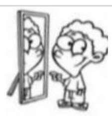
التبــريـر

	الاستقرائي		الاستنتاجي
التعريف	تبرير مستعمل فيه أمثله محدده للوصول لنتيجة	التعريف	قواعد وحقائق وتعريفات وخصائص
التخمين	العبارة النهائية التي توصلت إليها باستعمال التبرير الاستقرائي	قانون القياس المنطقي	اذا كان $p \to q$ صائبة p صائبة فإن q صائبة
الأنواع	1- جبري 2- هندسي	قانون الفصل المنطقي	اذا كان $p \to q$ صائبة $q \to r$ صائبة فإن $p \to r$ صائبة

<table>
<tr><th colspan="4">المنطق</th></tr>
<tr><td>التعريف</td><td colspan="3">جملة جبرية لها حالتان صائبة T و خاطئة F</td></tr>
<tr><td>النفي</td><td colspan="3">معنى مضاد لمعنى العبارة $P \xrightarrow{\text{نفي}} \sim P$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">العبارة</td><td>وصل</td><td colspan="2">q و p $(p \wedge q)$ تكون صائبة اذا كانت جميع العبارات المكونة لها صائبة</td></tr>
<tr><td>فصل</td><td colspan="2">q أو p $(p \vee q)$ تكون خاطئة فقط اذا كانت جميع العبارات المكونة لها خاطئة</td></tr>
<tr><td rowspan="2">شرطية</td><td>الصيغة</td><td>إذا .. فإن $p \to q$ حيث p الفرض، q النتيجة ، تكون خاطئة إذا كان الفرض صائب والنتيجة خاطئ</td></tr>
<tr><td>مرتبطة</td><td>العكس $q \to p$ المعكوس $\sim P \to \sim q$ المعاكس الإيجابي $\sim q \to \sim p$</td></tr>
</table>

المسلمات الهندسية

النقاط والمستقيمات والمستويات		
1.1	أي نقطتين يمر بهما مستقيم واحد	
1.2	أي ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد	
1.3	كل مستقيم يحوي نقطتين على الأقل.	
1.4	كل مستوى يحوي ثلاث نقاط على الأقل ليست على استقامة واحدة.	
1.5	إذا وقعت نقطتان في مستوى فإن المستقيم الوحيد المار بهما يقع كلياً في ذلك المستوى.	
1.6	اذا تقاطع مستقيمان فإنهما يتقاطعان في نقطة.	
1.7	اذا تقاطع مستويان فإن تقاطعهما يكون مستقيماً .	

الخاصية		القطع المستقيمة		الزوايا
1	الجمع	$AB + BC = AC$		$\angle ABD + \angle DBC = \angle ABC$
2	الانعكاس	$\overline{AB} \cong \overline{AB}$		$\angle 1 \cong \angle 1$
3	التماثل	$\overline{CD} \cong \overline{AB}$ فإن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$		$\angle 2 \cong \angle 1$ فإن $\angle 1 \cong \angle 2$
4	التعدي	$\overline{CD} \cong \overline{EF}$ ، $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ فإن $\overline{AB} \cong \overline{EF}$		$\angle 2 \cong \angle 1$ و $\angle 2 \cong \angle 3$ فإن $\angle 1 \cong \angle 3$

تعريفات مهمة عن البراهين

المسلمة (البديهية)	هي عبارة تعطي وصف لعلاقة أساسية بين مفاهيم أولية وتقبل على أنها صحيحة دون برهان
التبرير الاستقرائي	هو تبرير نستعمل فيه أمثلة محددة للوصول إلى نتيجة، وهذه النتيجة تسمى (تخمين)
التخمين	هو عبارة يتم التوصل إليها باستعمال التبرير الاستقرائي.، أي أنه يتوقع صحتها بناء على عدد من الأمثلة. ويتم إثبات صحة التخمين باستخدام (البرهان) ويتم إثبات عدم صحته بإيجاد (مثال مضاد)
البرهان	هو دليل منطقي لإثبات صحة عبارة ما، كل عبارة فيه تكون مبررة بعبارة سبق إثباتها (نظرية) أو عبارة تم الاتفاق على صحتها (مسلمة).
المثال المضاد	هو مثال معاكس للتخمين لإثبات عدم صحته، وقد يكون عددا أو رسما أو عبارة.
النظرية	هي عبارة (تخمين) تم إثبات صحتها بالبرهان، أي أنها العبارة النهائية التي يتم التوصل إليها باستخدام البرهان.
النتيجة	هي نظرية يكون برهانها مبنيا على نظرية أخرى.

التبرير الاستنتاجي

يعد التبرير الاستنتاجي مهماً وأساسيا للبرهنة.

❖ **التبرير الاستنتاجي:**

يستعمل حقائق وقواعد وتعريفات وخصائص من أجل الوصول إلى نتائج منطقية من عبارات معطاة. ويتكون من قانونين هما:

1. **قانون الفصل المنطقي:** إذا كانت العبارة الشرطية $p \to q$ صائبة والفرض p صائبا، فإن النتيجة q تكون صائبة أيضا .
2. **قانون القياس المنطقي:** إذا كانت العبارتان الشرطيتان $p \to q, q \to r$ صائبتين، فإن العبارة الشرطية $p \to r$ صائبة أيضا

ملاحظات هامة

1. **عند إثبات صحة تخمين بالبرهان، يصبح التخمين نظرية يمكن استخدامها في برهنة نظريات أخرى، وكذلك في حل المسائل الرياضية ذات العلاقة.**
2. **يكفي مثال واحد فقط لإثبات عدم صحة تخمين ما، بينما لا يكفي عدد من الأمثلة لإثبات صحته، بل لا بد من استخدام البرهان لذلك.**
3. **يتم استخدام العبارة الشرطية لكتابة التخمين. حيث تتكون من فرض وهو الجملة التي تلي كلمة (إذا)، والنتيجة هي الجملة التي تلي كلمة (فإن).**
4. **الفرق بين التبرير الاستقرائي والتبرير الاستنتاجي أن نتيجة التبرير الاستقرائي يعطي تخمينا، بينما يقوم التبرير الاستنتاجي بإثبات التخمين ليصبح نظرية.**

أنواع البرهان

<table>
<tr><th>البرهان المباشر</th><th>البرهان غير المباشر</th></tr>
<tr><td>هو البدء بمعطيات صحيحة لإثبات أن النتيجة صحيحة.</td><td>هو الفرض بأن النتيجة خطأ، ثم تبين أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض في المعطيات أو مع حقيقة سابقة كتعريف، أو مسلمة، أو نظرية. وحيث أن جميع خطوات البرهان صحيحة منطقيا، فإن هذا يكون إثباتا لخطأ الافتراض، وعلى ذلك يجب أن تكون النتيجة الأصلية صحيحة.</td></tr>
<tr><td>نفرض أن $p \to q$ صحيحة</td><td>نفرض أن $\sim p \to q$ صحيحة</td></tr>
<tr><td>خطوات كتابة البرهان المباشر:
1. نكتب المعطيات، ونرسم شكل يوضحها إن أمكن.
2. نكتب العبارة أو التخمين المطلوب إثباته.
3. استعمال التبرير الاستنتاجي لتكوين سلسلة منطقية من العبارات التي تربط المعطيات بالمطلوب.
4. تبرير كل عبارة باستعمال تعريفات أو خصائص جبرية أو مسلمات أو نظريات.
5. كتابة العبارة أو التخمين الذي تم إثباته.</td><td>خطوات كتابة البرهان غير المباشر:
1. نحدد النتيجة التي ستتم برهنتها. ثم افتراض خطئها، وذلك بافتراض أن نفيها صحيح.
2. نستعمل التبرير المنطقي لنبين أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض مع المعطيات أو مع حقيقة أخرى، مثل تعريف مسلمة أو نظرية.
3. بما أن الافتراض الذي تم البدء به أدى إلى تناقض، نبين أن النتيجة الأصلية المطلوب إثباتها يجب أن تكون صحيحة.</td></tr>
<tr><th colspan="2">البرهان باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضي</th></tr>
<tr><td colspan="2">هو أسلوب لبرهنة الجمل الرياضية المتعلقة بالأعداد الطبيعية.</td></tr>
<tr><td colspan="2">خطوات مبدأ الاستقراء الرياضي:
1. برهن أن الجملة صحيحة عندما n=1
2. افترض أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي k. وهذا الفرض يسمى فرضية الاستقراء.
برهن أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي التالي: K+1</td></tr>
</table>

أشكال عرض البراهين

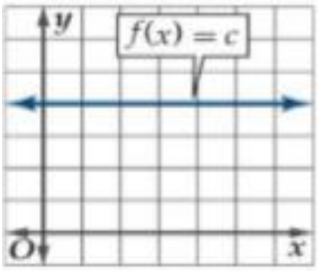
يمكن عرض البراهين بأكثر من شكل، وهذه الأشكال هي:

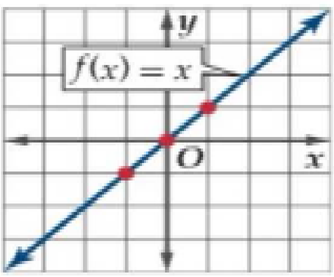
❖ البرهان الحر:	فيه نكتب فقرة تفسر أسباب صحة التخمين في موقف معطى.
❖ البرهان العكسي:	هو البدء من المطلوب إثباته والعمل عكسيا خطوة بخطوة حتى نصل إلى المعطيات. (هل هذا شكل من أشكال البراهين أم نوع؟)
❖ البرهان الجبري:	هو برهان يتكون من سلسلة عبارات جبرية.
❖ البرهان ذو العمودين:	هو برهان يتكون من عمودين، حيث تكتب العبارات مرتبة في عمود، والتبريرات في عمود موازٍ.
❖ البرهان الهندسي:	هو برهان يتكون من سلسلة من العبارات الجبرية لإثبات العلاقات بين القطع المستقيمة والزوايا.
❖ البرهان التسلسلي:	تستعمل عبارات مكتوبة في مستطيلات، وأسهم تبين التسلسل المنطقي لهذه العبارات. ويكتب في أسفل كل مستطيل السبب الذي يبرر العبارة المكتوبة داخله.
❖ البرهان الإحداثي:	هو برهان يستعمل الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر لإثبات صحة المفاهيم الهندسية. فالخطوة الأولى في البرهان الإحداثي هي تمثيل الشكل في المستوى

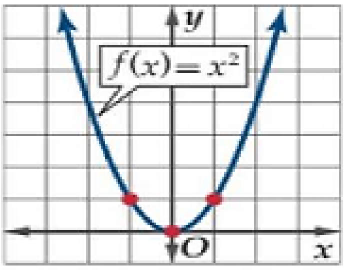
للعودة إلى محتويات قسم الجبر
اضغط هنا

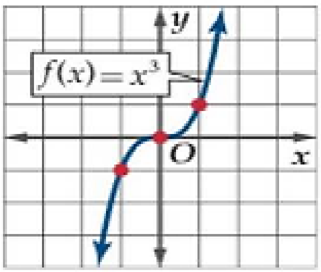
• الدوال الرئيسية (الأم)

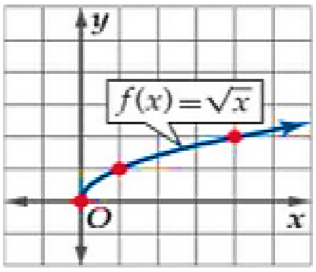
عائلة الدوال هي مجموعة دوال تشترك منحنياتها في صفة أو أكثر .وتعرف الدالة الرئيسة (الأم): على أنها أبسط دالة في العائلة.

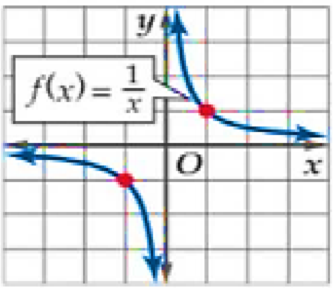
الدالة الثابتة			
الصيغة $f(x) = c$	**التمثيل** خط أفقي	**المجال** R	**المدى** $\{C\}$
المقطع x عندما C=0 فإن المنحنى يقطع محور X في جميع نقاطه		**الاتصال** متصلة عند جميع القيم	
التماثل متماثل حول محور y (الدالة زوجية)		**فترات التزايد والتناقص:** ثابت-	
سلوك طرفي التمثيل البياني من اليمين: $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$ من اليسار: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c$			

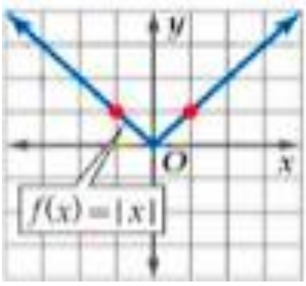
الدالة المحايدة			
الصيغة $f(x) = x$	**التمثيل**	**المجال** R	**المدى** R
المقطع x 0	**المقطع y** 0	**الاتصال** متصلة عند جميع القيم	
التماثل متماثل حول نقطة الأصل (الدالة فردية)		**فترات التزايد والتناقص:** تزايديه في الفترة $(-\infty, \infty)$	
سلوك طرفي التمثيل البياني من اليمين: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ من اليسار: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$			

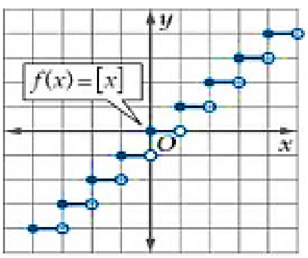
الدالة التربيعية		
الصيغة $f(x) = x^2$	**التمثيل** قطع مكافئ	**المجال** R — **المدى** $y \geq 0$
المقطع x 0	**المقطع y** 0	**الاتصال** متصل عند جميع قيم المجال.
التماثل	متماثل حول محور y (الدالة زوجية)	**فترات التزايد والتناقص:** متزايدة في الفترة $(0, \infty)$ ، ومتناقصة في الفترة $(-\infty, 0)$
سلوك طرفي التمثيل البياني من اليمين: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ من اليسار: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$		

الدالة التكعيبية		
الصيغة $f(x) = x^3$	**التمثيل**	**المجال** R — **المدى** R
المقطع x 0	**المقطع y** 0	**الاتصال** متصلة عند جميع القيم
التماثل	متماثل حول نقطة الأصل (الدالة فردية)	**فترات التزايد والتناقص:** تزايديه في الفترة $(-\infty, \infty)$
سلوك طرفي التمثيل البياني من اليمين: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ من اليسار: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$		

دالة الجذر التربيعي			
الصيغة $f(x) = \sqrt{x}$	**التمثيل**	**المجال** $[0, \infty)$	**المدى** $y \geq 0$
المقطع x 0	**المقطع y** 0	**الاتصال** متصل عند جميع قيم المجال.	
التماثل غير متماثل (ليست زوجية و لا فردية)		**فترات التزايد والتناقص:** متزايدة في الفترة $(0, \infty)$	
سلوك طرفي التمثيل البياني من اليمين: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$			

دالة المقلوب			
الصيغة $f(x) = \frac{1}{x}$	**التمثيل** قطع زائد	**المجال** $R - \{0\}$	**المدى** $R - \{0\}$
المقطع x لا يوجد	**المقطع y** لا يوجد	**الاتصال** عدم اتصال لانهائي عند x=0	
التماثل متماثل حول نقطة الأصل (الدالة فردية)		**فترات التزايد والتناقص:** متناقصة في مجالها $(-\infty ، 0) \cup (0, \infty)$	
سلوك طرفي التمثيل البياني من اليمين: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ من اليسار: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$			

<table>
<tr><th colspan="4">دالة القيمة المطلقة</th></tr>
<tr><td>المدى $y \geq 0$</td><td>المجال R</td><td>التمثيل على شكل حرف V</td><td>الصيغة $f(x) = |x|$</td></tr>
<tr><td colspan="2">الاتصال متصل عند جميع قيم المجال.</td><td>المقطع y 0</td><td>المقطع x 0</td></tr>
<tr><td colspan="2">فترات التزايد والتناقص:
متناقصة في الفترة $(-\infty ، 0)$
متزايدة في الفترة $(0 ، \infty)$</td><td colspan="2">التماثل متماثل حول محور y (الدالة زوجية)</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">سلوك طرفي التمثيل البياني
من اليمين: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
من اليسار: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="4">دالة أكبر عدد صحيح (الدرجية)</th></tr>
<tr><td>المدى Z</td><td>المجال R</td><td>التمثيل قطع مستقيمة أفقية</td><td>الصيغة $f(x) = [\![x]\!]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">الاتصال عدم اتصال قفزي عند z.</td><td>المقطع y 0</td><td>المقطع x $0 \leq x < 1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">فترات التزايد والتناقص:
الدالة ثابتة عند $\{x \mid x \notin z\}$
الدالة متزايدة عند $\{x \mid x \in z\}$</td><td colspan="2">التماثل غير متماثل (ليست زوجية ولا فردية)</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">سلوك طرفي التمثيل البياني
من اليمين: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
من اليسار: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$</td></tr>
</table>

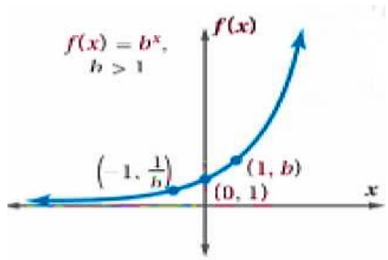
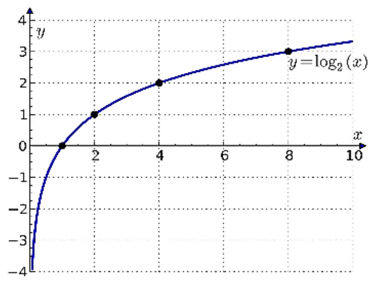
للعودة إلى محتويات قسم الجبر
اضغط هنا

• الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية

❖ الدالة اللوغاريتمية: هي دالة تكتب على الصورة $f(x) = \log_b x$ ، حيث $b \neq 1$

❖ الدالة الأسية: هي دالة تكتب على الصورة $y = ab^x$ حيث $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$

الدالة العكسية للدالة الأسية تسمى الدلة اللوغاريتمية.

المقارنة	الدالة الأسية	الدالة اللوغارتمية
الدلة الرئيسية (الأم)	$y = b^x$	$\log_b x = y$
التمثيل البياني	$y = 2^x$ 	$x = 2^y$ 
المجال	R	R^+
المدى	R^+	R
خط التقارب	محور x	محور y
مقطع المحور	$y = 1$	$x = 1$
خصائص منحنى الدالة	$f(x) = b^x$ النمو الأسي $b > 1$: متصل، متباين، متزايد الاضمحلال الأسي $0 < b < 1$: متصل، متباين، متناقص	$f(x) = \log_b x$ $b > 1$: متصل، متباين، متزايد $0 < b < 1$: متصل، متباين، متناقص

ملاحظة

أساس العبارة الأسّية $A(t) = a(1 + r)^t$

$1 + r$ يسمى عامل النمو

أساس العبارة الأسّية $A(t) = a(1 - r)^t$

$1 - r$ يسمى عامل الاضمحلال

التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية والعكس

الصورة الأسية		الصورة اللوغاريتمية
$b^y = x$	⟺	$\log_b x = y$
⇓		⇓
$4^2 = 16$	⟺	$\log_4 16 = 2$

اللوغاريتمات العشرية

❖ اللوغاريتم العشري: عند كتابة اللوغاريتم دون أساس فإن ذلك يعني أن الأساس هو 10 أي أن:

$\log x$ تعني $\log_{10} x$

صيغة تغيير الأساس:

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

لوغاريتم العدد الأصلي للأساس b ← (البسط)

لوغاريتم الأساس القديم ← (المقام)

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

خاصية الضرب	$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
خاصية القسمة	$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
خاصية لوغاريتم القوة	$\log_b x^m = m \log_b x$

$\log_b 1 = 0$
$\log_b b = 1$
$\log_b b^x = x$
$b^{\log_b x} = x \quad , x > 0$

ملاحظة: تكون اللوغاريتمات غير معرفة إذا كانت:

$\log_b(-)$ $\log_b(0)$

للعودة إلى محتويات قسم الجبر
اضغط هنا

• المتجهات

مقدمة في المتجهات

الكميات الفيزيائية

كمية متجهة

هي التي لها اتجاه ومقدار

كمية قياسية

هي التي لها مقدار فقط

اتجاه المتجه

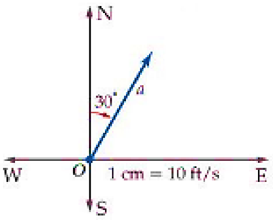
الاتجاه الأفقي

الاتجاه الربعي

- يصنع زاوية مع المحور الرأسي(شمال، جنوب)
- زاوية قياسها بين 0° و 90°
- تكتب الزاوية على الصورة S 35°E

الاتجاه الحقيقي

- بدءا من الشمال
- مع عقارب الساعة
- تكتب بثلاثة أرقام



مقدمة في المتجهات

❖ المتجهات المتوازية: لها الاتجاه نفسه أو اتجاهين متعاكسين وليس بالضرورة أن يكون لها الطول نفسه.

❖ المتجهات المتساوية: لها الاتجاه نفسه والطول نفسه.

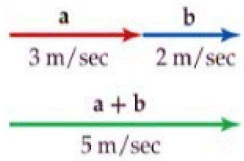
❖ المتجهان المتعاكسان: لها الطول نفسه و لكن في اتجاهين متعاكسين. $a + (-a) = 0$

إيجاد المحصلة

المتجهات المتوازية

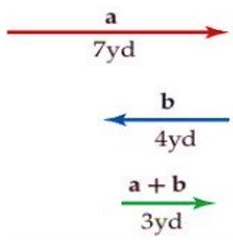
في نفس الاتجاه

نجمع والمحصلة نفس الاتجاه



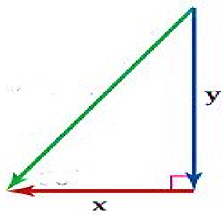
في اتجاهين متعاكسين

نطرح والمحصلة نفس المتجه الأكبر



المتجهات المتعامدة

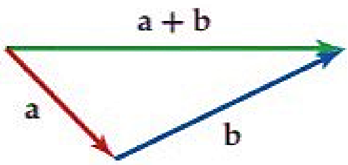
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



غير ذلك

قاعدة المثلث

محصلة المتجهين a، b هي المتجه المرسوم من نقطة بداية a إلى نقطة النهاية b



قاعدة متوازي الأضلاع

محصلة المتجهين هي المتجه الذي يمثله قطر متوازي الأضلاع

المتجهات في المستوى الإحداثي

❖ الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي بدايته $A(x_1, y_1)$ ونهايته $B(x_2, y_2)$ هي: $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$

يمكن كتابة الصورة الإحداثية بصور مختلفة:

1/ التوافق الخطي : $v = \langle a, b \rangle$
$= a\,i + bj$

2/ الصورة المثلثية : إيجاد المتجه بدلالة زاوية وطول
$= \langle |v| \cos\theta \,, |v| \sin\theta \rangle$
$= |v|(\cos\theta) i \,, |v|(\sin\theta)\, j$

إيجاد طول المتجه

1/ v متجه بدايته (x_1, y_1) ونهايته (x_2, y_2) فإن طوله

$$|v| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2/ إذا كان $\langle a, b \rangle$ هي الصورة الإحداثية للمتجه v

فإن: $|v| = \sqrt{a^2 + b^2}$

العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي

1/ جمع متجهين : $a + b = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$

2/ طرح متجهين : $a - b = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$

3 / ضرب متجه في عدد حقيقي : $k\,a = \langle k\,a_1, ka_2 \rangle$

متجه الوحدة: هو المتجه الذي طوله 1 ويرمز له بالرمز u $\quad u = \frac{1}{|v|} \cdot v$

زوايا الاتجاه للمتجهات

إيجاد زاوية بين متجهين غير صفريين $\langle a, b \rangle$

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$$

إيجاد زاوية المتجه $\langle a, b \rangle$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

المتجهات في الفضاء

❖ الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي بدايته $A(x_1, y_1, z_1)$ ونهايته $B(x_2, y_2, z_2)$ هي:

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

يمكن التعبير عن الصورة الإحداثية للمتجه $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ؛ على صورة توافق خطي

$$v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

المسافة في الفضاء

v متجه بدايته $A = (x_1, y_1, z_1)$ ونهايته $B = (x_2, y_2, z_2)$

فإن طوله

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

قانون نقطة المنتصف في الفضاء

$$M = \left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}, \frac{z_2 + z_1}{2} \right)$$

العمليات على المتجهات في الفضاء

1/ جمع متجهين: $a + b = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$

2/ طرح متجهين: $a - b = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$

3 / ضرب متجه في عدد حقيقي: $k a = \langle k a_1, k a_2, k a_3 \rangle$

متجه الوحدة: هو المتجه الذي طوله 1 ويرمز له بالرمز u

$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{1}{|v|} \cdot v$$

الزاوية بين متجهين

$$\cos\theta = \frac{u.v}{|u||v|}$$

الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى

❖ يعرف الضرب الداخلي للمتجهين:

$b = \langle b_1, b_2\rangle , a = \langle a_1, a_2\rangle$ على أنه $a.b = a_1b_1 + a_2b_2$

(فإن حاصل الضرب الداخلي يكون عددا)

العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه

$|u|^2 = u . u$

الشغل

$W = F.\overrightarrow{AB}$

المتجهات المتعامدة

يكون المتجهان غير الصفريين $a.b$ متعامدان إذا وفقط كان الضرب الداخلي يساوي صفر

$a.b = 0$

الضرب الداخلي في الفضاء

❖ يعرف الضرب الداخلي في الفضاء:

$b = \langle b_1, b_2, b_3\rangle , a = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ على أنه $a.b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

الضرب الاتجاهي

إذا كان: $a = a_1i + a_2\, j + a_3$, $b = \ b_1i + b_2j\ + b_3k$

فإن الضرب الاتجاهي هو

$a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2)\, i\ - (a_1b_3 - a_3b_1)j\ + (a_1b_2 - a_2b_1)k$

(فإن حاصل الضرب الاتجاهي يكون متجها)

مساحة متوازي الأضلاع في الفضاء

$|u \times v|$

حجم متوازي السطوح

$t\,.(u \times v)$

للعودة إلى محتويات قسم الجبر
اضغط هنا

• الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

تحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية

إذا كان للنقطة P الإحداثيات القطبية (r, θ) فإن الإحداثيات الديكارتية (x, y) للنقطة P هي:

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

أي أن $(x, y) = (r\cos\theta \;,\; r\sin\theta)$

تحويل معادلة قطبية إلى معادلة ديكارتية

$r =$ عدد

- نربع الطرفين
- نعوض عن $r^2 = x^2 + y^2$

$\theta =$ زاوية

- نأخذ tan للطرفين.
- نعوض عن $\tan\theta = \frac{y}{x}$
- نضرب الطرفين

$r = a\cos\theta$

$r = a\sin\theta$

$r = a\cos\theta + b\sin\theta$

- نضرب الطرفين ب r
- نعوض عن

$r^2 = x^2 + y^2$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية

إذا كان للنقطة P الإحداثيات الديكارتية (x, y) فإن الإحداثيات القطبية للنقطة P هي (r, θ) حيث:

$x < 0$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$x > 0$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$x = 0$

$y > 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$y < 0 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$

$$r = |y|$$

تمثيل نقطة في المستوى القطبي (r , θ)

نبدأ رسم الزاوية θ

θ (موجب)

دورانا بعكس اتجاه عقارب الساعة.

θ (سالب)

دورانا باتجاه عقارب الساعة.

نحدد نصف القطر r

r (موجب)

تقع على ضلع الانتهاء لزاوية.

r (سالب)

تقع على نصف المستقيم المقابل لضلع الانتهاء للزاوية.

المسافة بين نقطتين في المستوى القطبي

$$p_1p_2=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$$

الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

القيمة المطلقة لعدد مركب

$$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$$

الصور القطبية لعدد مركب

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ضرب الأعداد المركبة على صورة

صيغة الضرب: $z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

صيغة القسمة: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

نظرية ديموافر

$$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n$$
$$= r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

الجذور المختلفة

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)$$

حيث $n \geq 2$

العمليات على الأعداد المركبة

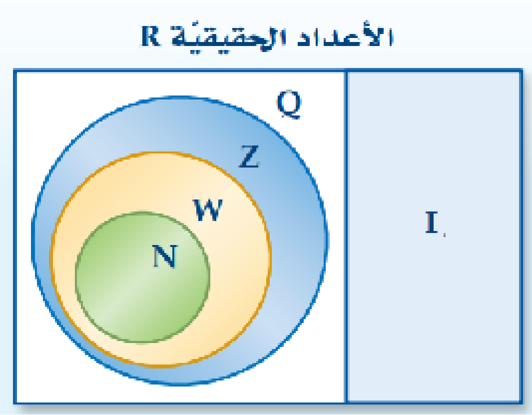
العدد المركب هو أي عدد يمكن كتابته على الصورة $a + ib$ حيث b,a عددان حقيقيان، و i الوحدة التخيلية، ويسمى a الجزء الحقيقي، و b الجزء التخيلي.

إذا كان لدينا عددين مركبين $Z_1 = a_1 + ib_1$, $Z_2 = a_2 + ib_2$	
الجمع والطرح	$Z_1 \pm Z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$
الضرب	$Z_1 Z_2 = (a_1 a_2) - (b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i$
مرافق العدد المركب	مرافق العدد $Z = a + b\,i$ هو $\bar{Z} = a - b\,i$
ضرب العدد المركب في مرافقه	$Z\,\bar{Z} = (a + b\,i)\,(a - b\,i)$
مقياس العدد المركب	مقياس العدد $Z = a + b\,i$ هو $\lvert Z \rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$
قسمة الأعداد المركبة	a) $\frac{2i}{3+6i}$ $\frac{2i}{3+6i} = \frac{2i}{3+6i} \cdot \frac{3-6i}{3-6i}$ $3-6i$, $3+6i$ مترافقان مركّبان $= \frac{6i - 12i^2}{9 - 36i^2}$ اضرب $= \frac{6i - 12(-1)}{9 - 36(-1)}$ $i^2 = -1$ $= \frac{6i + 12}{45}$ بسّط $= \frac{4}{15} + \frac{2}{15} i$ اكتب الناتج على الصورة $a + bi$ b) $\frac{4+i}{5i}$ $\frac{4+i}{5i} = \frac{4+i}{5i} \cdot \frac{i}{i}$ اضرب في $\frac{i}{i}$ $= \frac{4i + i^2}{5i^2}$ اضرب $= \frac{4i - 1}{-5}$ $i^2 = -1$ $= \frac{1}{5} - \frac{4}{5} i$ اكتب الناتج على الصورة $a + bi$

للعودة إلى محتويات قسم الجبر
اضغط هنا

• المتباينات والدوال

مجموعة الأعداد الحقيقية



الرمز	المجموعة	أمثلة
$\mathbb{R}$	الأعداد الحقيقية	جميع الأعداد النسبية وغير النسبية
$\mathbb{I}$	الأعداد غير النسبية	$\sqrt{2}, \sqrt{5}, \varphi, \pi, e, 0.1.73205 \ldots$
$\mathbb{Q}$	الأعداد النسبية	$0.125, \frac{-7}{8}, \frac{2}{3} = 0.666$
$\mathbb{Z}$	الأعداد الصحيحة	$-5, 17, -23, 8$
$\mathbb{W}$	الأعداد الكلية	$2, 96, 0, \sqrt{36}$
$\mathbb{N}$	الأعداد الطبيعية	$3, 17, 6, 86$

خصائص الأعداد الحقيقية

الخاصية	الجمع	الضرب
التبديلية	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
التجميعية	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
العنصر المحايد	$a + 0 = a = 0 + a$	$a \times 1 = a = 1 \times a$
النظير	$a + (-a) = 0 = (-a) + a$	$a \times \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \times a, a \neq 0$
الانغلاق	$(a + b)$ عدد حقيقي	$(a.b)$ عدد حقيقي
التوزيع	$(b + c)a = ba + ca$	$a(b + c) = ab + ac,$

تبسيط العبارات الجبرية:

يتم استخدام خصائص الأعداد الحقيقية لتبسيط العبارات الجبرية.

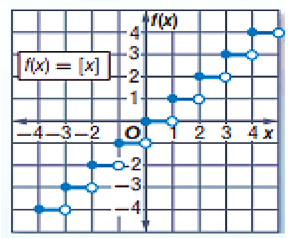
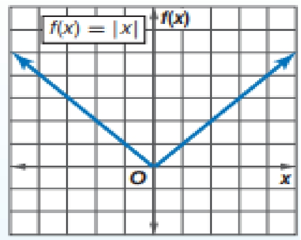
- ❖ **الدالة:** هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.
- ❖ **الدالة المتباينة:** هي دالة يرتبط فيها كل عنصر من المجال بعنصر مختلف من المدى، وهذا يعني أنه لا يمكن أن يرتبط عنصران من المجال بالعنصر نفسه من المدى.

التمثيلات المتعددة للعلاقات والدوال

التمثيل	كيف نختبر أن العلاقة دالة	كيف نختبر أن الدالة متباينة
معادلة	يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط من المدى	يرتبط فيها كل عنصر من المجال بعنصر مختلف من المدى
أزواج مرتبة	إذا لم يتكرر العنصر أكثر من مرة في المجال فالعلاقة دالة	إذا لم يتكرر العنصر أكثر من مرة في المدى فالدالة متباينة.
مخطط سهمي	إذا انطلق سهم واحد فقط من كل عنصر في المجال فالعلاقة دالة	إذا انطلق سهم واحد على الأكثر إلى كل عنصر في المدى.
جدول	إذا لم يتكرر العنصر أكثر من مرة في المجال فالعلاقة دالة	إذا لم يتكرر العنصر أكثر من مرة في المدى فالدالة متباينة.
التمثيل البياني	اختبار الخط الرأسي (إذا مر المستقيم بنقطة واحدة فقط على الأكثر فالعلاقة دالة)	اختبار الخط الأفقي (إذا مر المستقيم الأفقي بنقطة واحدة فقط في التمثيل البياني للدالة فالدالة متباينة)

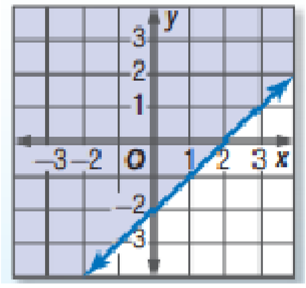
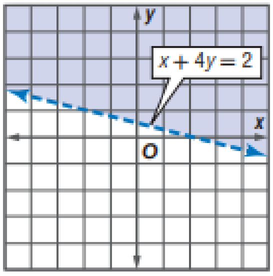
الدوال متعددة التعريف

من الدوال متعددة التعريف الدوال الخطية متعددة التعريف ومن أشكالها:

	دالة أكبر عدد صحيح	دالة القيمة المطلقة
الدالة الرئيسة (الأم)	$f(x) = [x]$	$f(x) = \|x\|$
	$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} x & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$
المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية	مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى	مجموعة الأعداد الصحيحة	مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة
المقطعان	$x = 0, 0 \le x < 1$ حيث $f(x) = 0$	$x = 0, f(x) = 0$
التمثيل البياني		

المتباينات الخطية

تشبه المعادلات الخطية، ولكن الفرق بينهما فقط هو وضع المتباينة بدلا من رمز المساواة. المنطقة المظللة في التمثيل البياني للمتباينة الخطية تسمى منطقة الحل.

الحد المتصل	الحد المتقطع
	

تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانياً

لتمثيل المتباينات بيانيا نقوم باتباع الخطوات التالية:

1) تمثيل المعادلة المرتبطة بالمتباينة.
2) رسم المعادلة (حد المتباينة) في حال كان رمز المتباينة $\geq$ ، $\leq$ فإن حد المتباينة يكون متصل. أما إذا كان رمز المتباينة $>$ ، $<$ فإن الحد يكون متقطعا.
3) اختبار نقطة لا تقع على حد المتباينة لتحديد منطقة الحل. إذا كانت النقطة تحقق المتباينة نظلل المنطقة التي تقع فيها. أما إذا لم تكن النقطة تحقق المتباينة فإننا نظلل الاتجاه المعاكس لها بالنسبة للحد.

حل أنظمة المتباينات الخطية بيانياً

نظام المتباينات الخطية هو مجموعة من المتباينات الخطية التي لها المتغيرات نفسها.

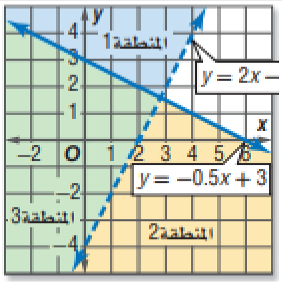
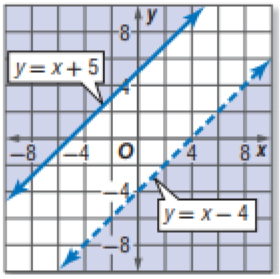
حل نظام المتباينات الخطية يعني إيجاد أزواج مرتبة تحقق جميع المتباينات في النظام.

ويتم ذلك من خلال:

1) تمثيل كل متباينة في النظام بيانيا.
2) تحديد المنطقة المظللة المشتركة بين مناطق حل متباينات النظام والتي تمثل منطقة حل النظام.

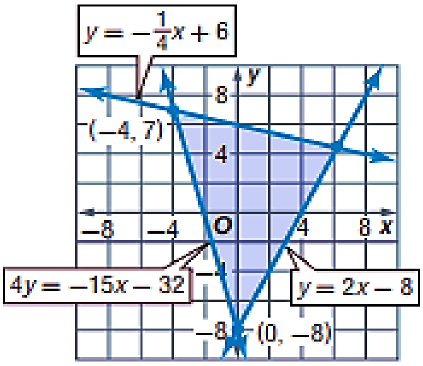
ملاحظة: قد تكون هناك مناطق حل متقاطعة، عندها يكون حل النظام هو النقاط المشتركة بين مناطق حل المتباينات في النظام.

إذا لم تكن هناك مناطق حل متقاطعة لجميع المتباينات في النظام فإن مجموعة حل المتباينة $=\emptyset$

مناطق حل متقاطعة	مناطق حل غير متقاطعة
	

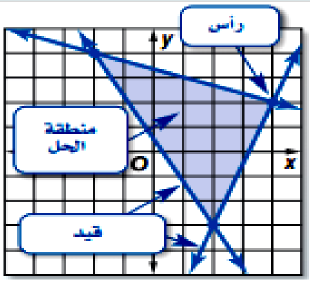
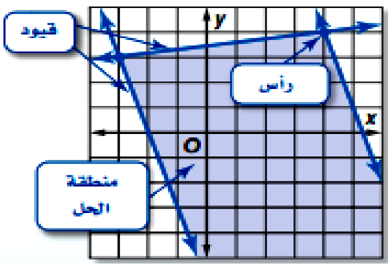
إيجاد رؤوس منطقة الحل

ينتج أحيانا عن التمثيل البياني لنظام متباينات خطية منطقة مغلقة على شكل مضلع، ويمكن إيجاد إحداثيات رؤوس تلك المنطقة بإيجاد إحداثيات نقاط تقاطع المستقيمات المحددة للمنطقة (الحدود).



البرمجة الخطية والحل الأمثل

تعد البرمجة الخطية أحد الطرق لإيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة ما تحت قيود معينة كل منها عبارة عن متباينة خطية، وذلك بعد تمثيل نظام المتباينات بيانيا، وتقع القيمة العظمى والصغرى إن وجدت للدالة ذات الصلة دائما عند أحد رؤوس منطقة الحل.

منطقة حل محدودة (مغلقة)	منطقة حل غير محدودة
	

إيجاد الحل الأمثل

يسمى البحث عن السعر أو الكمية الأفضل أو الأنسب لتقليل التكلفة أو زيادة الربح الحل الأمثل، ويمكن الحصول على ذلك الحل باستعمال البرمجة الخطية.

خطوات استعمال البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل:

الخطوة 1: حدد المتغيرات.

الخطوة 2: اكتب نظام متباينات خطية يمثل المسألة.

الخطوة 3: مثل نظام المتباينات بيانيا.

الخطوة 4:جد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.

الخطوة 5: اكتب الدالة الخطية التي تريد إيجاد قيمتها العظمى أو الصغرى.

الخطوة 6: عوض إحداثيات الرؤوس في الدالة.

الخطوة 7: اختر القيمة العظمى أو الصغرى وفقا لما هو مطلوب في المسألة.

• المصفوفات

تعريف المصفوفات: المصفوفة هي ترتيب للأعداد والمتغيرات على شكل صفوف أفقية أو أعمدة رأسية تكتب داخل قوسين ( ) ,[ ] وتأخذ أحد الحروف الكبيرة A, B, C .

رتبتـــها: أبعاد المصفوفة $A_{m\times n}$ ، m عدد الصفوف ، n عدد الأعمدة .

أنواع المصفوفات

نوع المصفوفة	تعريفها	مثـال
مصفوفة الصف	تحتوي على صف واحد فقط	$A_{1\times4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$
مصفوفة العمود	تحتوي على عمود واحد فقط	$B_{3\times1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$
المصفوفة المربعة	عدد الصفوف =عدد الأعمدة	$C_{2\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
المصفوفة المستطيلة	عدد الصفوف ≠ عدد الأعمدة	$F_{3\times4} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
المصفوفة الصفرية	جميع عناصرها أصفار (مستطيلة أو مربعة)	$G_{2\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $E_{2\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
مصفوفة الوحدة	مصفوفة مربعة جميع عناصرها اصفار باستثناء الواقعة على قطرها الرئيسي تساوي واحد	$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ،$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
المصفوفة القطرية	هي مصفوفة مربعة تكون كل العناصر الواقعة خارج القطر الرئيسي مساوية للصفر ، أما العناصر التي تقع على القطر يمكنها أن تأخذ أي قيمة	$D_{3\times3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

العمليات على المصفوفات

تساوي مصفوفتين	نقول أن المصفوفتين $A = B$ اذا كانتا من نفس الرتبة $m \times n$ ولهما نفس العناصر المتناظرة $a_{ij} = b_{ij}$
مثال	اذا كان $A = \begin{bmatrix} x+2 & y+1 \\ z-1 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$ حيث $A = B$ اوجد قيمة x, y, z ؟ $x + 2 = -1$, $x = -3$ $y + 1 = 5$, $y = 4$ $z - 1 = 6$, $z = 7$

جمع وطرح مصفوفتين	يجب أن تكون من نفس الرتبة حيث يتم الجمع أو الطرح للعناصر المتناظرة في كلتا المصفوفتين

خواص جمع المصفوفات	عملية جمع المصفوفات عملية إبدالية .	$A + B = B + A$
	عملية جمع المصفوفات عملية تجميعية.	$(A + B) + C = A + (B + C)$
	المصفوفة الصفرية هي المصفوفة المحايدة.	$A + 0 = 0 + A$
	حيث $-A$ مصفوفة النظير (المعكوس) الجمعي .	$A + (-A) = (-A) + A = 0$

ضرب مصفوفتين	ضرب مصفوفة بعدد ما يتم ضرب العدد بجميع عناصر المصفوفة ضرب مصفوفتين $A_{m\times n} \times B_{p\times q}$ فإن شرط الضرب: $n = p$ أي أن عدد أعمدة المصفوفة الأولى =عدد صفوف المصفوفة الثانية والناتج $C_{m\times q}$

خواص ضرب المصفوفات	الضرب عملية غير إبدالية أي أن	$A \cdot B \neq B \cdot A$
	الخاصية التجميعية لضرب المصفوفات	$(AB)C = A(BC)$
	الخاصية التجميعية لضرب المصفوفات في عدد	$k(AB) = (kA)B = A(kB)$
	خاصية التوزيع للمصفوفات	$A(B + C) = AB + AC$

• المحددات

محدد المصفوفة من الرتبة 2×2

يرمز له بالرمز $\Leftarrow |A|$ | | حيث أن:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (3)(5) - (2)(4)$$

$$= 15 - 8 = 7$$

محدد المصفوفة من الرتبة 3×3

أولا: باستعمال قاعدة الأقطار

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{matrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{matrix} - \begin{matrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{matrix}$$

$$= (aei + bfg + cdh) - (bdi + afh + ceg)$$

مثال

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -9 & 3 & 4 \\ -3 & 8 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -9 & 3 & 4 \\ -3 & 8 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 4 & 1 \\ -9 & 3 \\ -3 & 8 \end{matrix} - \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -9 & 3 & 4 \\ -3 & 8 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 4 & 1 \\ -9 & 3 \\ -3 & 8 \end{matrix}$$

$$= (4 \times 3 \times 1) + (1 \times 4 \times (-3)) + (0 \times (-9) \times 8)$$

$$-((1 \times (-9) \times 1) + (4 \times 4 \times 8) + (0 \times 3 \times (-3))$$

$$= (12 - 12 + 0) - (-9 + 128 + 0)$$

$$= -119$$

ثانيا: باستعمال محددة المصفوفة 2×2

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

مثال

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -9 & 3 & 4 \\ -3 & 8 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$4\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} - (-9)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 4(3 - 32) + 9(1 - 0) - 3(4 - 0)$$

$$= 4(-29) + 9(1) - 3(4)$$

$$= -116 + 9 - 12 = -119$$

المعكوس الضربي للمصفوفة

رمز المعكوس الضربي	يرمز لها بالرمز A^{-1} بحيث أن .. $A^{-1}A = AA^{-1} = I$
قانون المعكوس الضربي	اذا كانت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ فإن النظير الضربي للمصفوفة: $A^{-1} = \frac{1}{\lvert A\rvert}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
شرط المعكوس الضربي	شرط وجود المعكوس الضربي للمصفوفة A هو أن $\lvert A\rvert \neq 0$
مثال	$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-4+6}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \lvert B\rvert = (2)(8) - (4)(4) = 0 \Rightarrow$ لا يوجد للمصفوفة معكوس ضربي لأن $\lvert B\rvert = 0$

حل نظام معادلتين باستخدام المحددات (قاعدة كرامر)

اذا كانت المعادلتان الخطيتان على الصورة :

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

القانون

نوجد المحددة الرئيسية Δ ⇐ $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

ثم نوجد محددة X Δ⇐ $\Delta X = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$

ثم نوجد المحددة Δy ⇐ $\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

ويكون الحل كما يلي :

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$
$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}$$

مثال

حل النظام بإستخدام قاعدة كرامر:

$$-x - 2y = -5$$
$$3x + 4y = 11$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2\ ,$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} = -20 + 22 = 2$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = -11 + 15 = 4$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{4}{2} = 2 \quad , \quad SS = \{(1, 2)\}$$

حل نظام معادلتين باستخدام المصفوفات (النظير الضربي)

لحل نظام معادلتين خطيتين على الصورة :
$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

القانون

نحولها إلى نظام مصفوفات كما يلي :

$$B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix},$$

A مصفوفة المعاملات، X مصفوفة المجاهيل ،
B مصفوفة الحدود المطلقة .
يمكن كتابة النظام السابق على الصورة
$$AX = B$$

ولحل النظام بطريقة المعكوس الضربي نوجد
$$A^{-1}$$
ثم يكون الحل كما يلي
$$X = A^{-1}B$$

مثال

حل النظام بإستخدام المصفوفات (النظير الضربي):

$$-x - 2y = -5$$
$$3x + 4y = 11$$

$$, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -5 \\ 11 \end{bmatrix} \quad AX = B, A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} X = A^{-1}B$$

$$= \begin{bmatrix} -10 + 11 \\ \frac{15}{2} - \frac{11}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$, SS = \{(1, 2)\} \qquad x = 1, y = 2$$

إيجاد مساحة المثلث باستخدام المصفوفات

القانون

يمكن إيجاد مساحة المثلث الذي رؤوسه
$$(a, b), (c, d), (e, f)$$

بالقانون :

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

مثال

أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه: $(3, 1), (4, 2), (0, 6)$؟

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow A$$

$$= \frac{1}{2} [3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}]$$

$$A = \frac{1}{2}[3(2 - 6) - 1(4 - 0) + 1(24 - 0)]$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}[3(-4) - 4 + 24]$$

$$A = \frac{1}{2}[-12 - 4 + 24]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(8) = 4$$

للعودة إلى محتويات قسم الجبر
اضغط هنا

• العلاقات والدوال العكسية والجذرية

العلاقة العكسية

- لإيجاد العلاقة العكسي تبدل إحداثيات الأزواج المرتبة
- $(a, b) \rightarrow (b, a)$
- مثال $f(x) = \{(1, 2), (3, -1)\}$

الدالة العكسية

- لإيجاد الدالة العكسية تبدل إحداثيات نتبع الخطوات التالية
- ١) نضع $f(x) = y$
- ٢) نبدل بين كل من x , y
- ٣) نحل المعادلة بالنسبة لـ y
- ٤) نضع $y = f^{-1}(x)$ إذا كانت العلاقة دالة

تمثيل دالة الجذر التربيعي

- نحدد مجال الدالة بشرط ماتحت الجذر أكبر من أو يساوي صفر
- نكون جدول بفرض قيم تبدأ بصفر الجذر ثم قيم أكبر منه
- نعوض في الدالة المطلوب تمثيلها لإيجاد قيم y ثم نرسم النقاط في المستوى

تمثيل متباينة الجذر التربيعي

- نكتب المعادلة المرتبطة بالمتباينة المعطاه
- نمثل دالة الجذر التربيعي بالخطوات المستخدمة عند تمثيل الدالة الجذرية
- نرسم الدالة متصلة اذا وجدت علامة المساواة في المتباينة ومتقطعة اذا لم يوجد علامة مساواة فيها
- نختبر منطقة الحل أو نظلل حسب إشارة المتباينة

للعودة إلى محتويات قسم الجبر
اضغط هنا

• العلاقات والدوال النسبية

ضرب العبارات النسبية وقسمتها

- **تبسيط العبارة النسبية**
  - نحلل كلا من البسط والمقام
  - نختصر العوامل المشتركة
  - نبسط الناتج
- **ضرب العبارة النسبية**
  - **وحيدات الحدود**
    - نحلل الأعداد ونختصر
    - المتغيرات في الضرب نجمع الأسس وفي القسمة نطرح الأسس
  - **كثيرات الحدود**
    - نحلل كلا من البسط والمقام
    - نختصر العوامل المشتركة
    - نضرب ما تبقى بعد الاختصار ونبسط الناتج
- **قسمة العبارة النسبية**
  - نحول عملية القسمة الى ضرب في مقلوب الكسرالثاني
  - نتبع نفس خطوات ضرب العبارات النسبية
- **تبسيط الكسور المركبة**
  - هي كسور يحتوي كلا من بسطها ومقامها على كسر
  - نكتب العبارة على صورة قسمة عبارتين
  - نحول القسمة الى ضرب في مقلوب العبارة الثانية
  - نحول ونختصر العوامل المشتركة ثم نبسط

جمع العبارات النسبية وطرحها

- **إيجاد LCM**
  - نحلل كلا من الأعداد أو كثيرات الحدود
  - نضرب جميع العوامل واذا كانت مشتركة ذات الأس الأكبر
- **جمع العبارات النسبية**
  - **وحيدات الحد**
    - نوجد LCM للمقامات
    - نضرب البسط والمقام للكسور بأعداد المتغيرات الناقصة لتوحيد المقامات باستعمال LCM
    - نكتب المقام المشترك ثم نجمع ونطرح البسط ثم نبسط الناتج
  - **كثيرات الحدود**
    - نحلل كلا من البسط والمقام
    - نوجد LCM للمقامات
    - نضرب البسط والمقام للكسور بأعداد المتغيرات الناقصة لتوحيد المقامات باستعمال LCM
    - نكتب المقام المشترك ثم نجمع أو نطرح البسط ثم نبسط الناتج
- **تبسيط الكسور المكبة ولذلك يوجد طريقتين**
  - **الطريقة الأولى**
    - نوحد المقام باستخدام LCM لكل من المقام للبسط وحده والمقام وحده
    - نكتب الكسر المركب كحاصل قسمة كسرين
    - نضرب الكسر الأول في مقلوب الكسر الثاني ثم نبسط الناتج
  - **الطريقة الثانية**
    - نوجد LCM لكل من البسط والمقام
    - نضرب كلى الكسرين في LCM البسط والمقام
    - نفكك الأقواس ونوزع

تمثيل دوال المقلوب بيانياً

$$y = \frac{a}{x - b} + C$$

تحديد المجال والمدى

لتحديد المجال نستبعد أصفار المقام

$x - b \neq 0 \Rightarrow x \neq b$

$\Rightarrow D_f = R - \{b\}$

خطوط التقارب

خط التقارب الرأسي معادلته

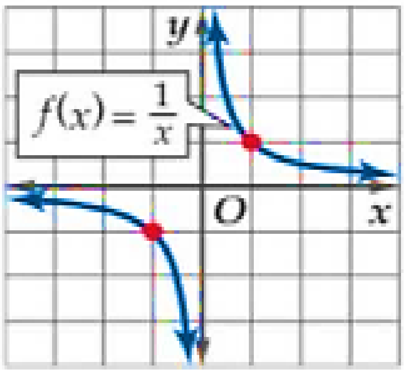
$x = b$

خط التقارب الأفقي معادلته

$y = c$

خطوات تمثيل دالة المقلوب

- توجد القيم التي تكون عندها الدالة غير معرفة بمساواة المقام بالصفر
- نضع قيمة الناتج من الخطوات السابقة في منتصف الجدول ونختار قيم حولها
- نكتب معادلة خطوط التقارب الرأسية والأفقية ونمثلها
- نمثل النقاط يمين صف المقام في جدول ثم نحلها ونقترب من خطوط التقارب وكذلك الجهة اليسرى



تمثيل الدوال النسبية بيانيا

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$$

خطوط التقارب

للدوال النسبية نوعين فقط من خطوط التقارب على الأكثر

- خطوط التقارب الرأسية عندما $b(x) = 0$
- يوجد للدالة خط تقاربي افقي واحد على الأكثر
- اذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام تكون معادلته $y = 0$
- درجة البسط تساوي درجة المقام تكون معادلته $y = \frac{a(x)\text{المعامل الرئيسي لـ}}{b(x)\text{المعامل الرئيسي لـ}}$
- درجة أكبر من درجة المقام لايوجد خط تقاربي أفقي
  ويكون الخط التقاربي المائل موجود إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام بدرجة واحدة و نحصل عليه بقسمة البسط على المقام

تمثيل دالة نسبية بها فجوات ، يوجد عوامل مشتركة بين البسط والمقام

- نحدد المجال وتكون الفجوة عند صفر المقام
- نحلل ونختصر ثم نمثل الدالة الناتجة بعد الاختصار مع تحديد الفجوة على الرسم

تمثيل دالة نسبية لها خطوط تقارب

- نوجد القيم التي تكون عندها الدالة غير معرفة بمساواة المقام بالصفر
- نضع القيمة الناتجة من الخطوة السابقة في منتصف الجدول ونختار قيم حولها
- نوجد أصفار الدالة بمساواة البسط بالصفر ونضيفها للجدول ونكتب معادلة خطوط التقارب الرأسية والأفقية ونمثلها
- تمثل النقاط يمين صفر المقام في الجدول ثم نصلها ونقترب من خطوط التقارب وكذلك الجهة اليسرى

حل المعادلات النسبية

- نوجد lcm للمقامات
- نضرب جميع حدود المعادلة في lcm ونختصر العوامل المشتركة للتخلص من المقامات
- نحل المعادلة الناتجة ثم نتحقق من صحة الحل بالتعويض أو باستبعاد أصفار المقام

حل المتباينة النسبية

- نوجد القيم المستثناة بمساواة المقام بالصفر
- نكتب المعادلة المرتبطة بالمتباينة المعطاة في السؤال
- نحل المعادلة بنفس الخطوات السابقة في حل المعادلات النسبية
- نتحقق برسم خط الأعداد ونحدد عليه الحلول والقيم المستثناة ثم نختار قيم داخل بينها ونعوض في المتباينة في كل فترة لتحديد الفترات التي تحقق أعدادها المتباينة

دوال التغير

التغير الطردي	التغير العكسي	التغير المشترك	التغير المركب
$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$	$y_1x_1 = y_2x_2$	$\frac{y_1}{x_1z_1} = \frac{y_2}{x_2z_2}$	$\frac{y_1z_1}{x_1} = \frac{y_2z_2}{x_2}$
y تتغير طرديا مع x	y تتغير عكسيا مع x	y تتغير طرديا مع كل من x,z	y تتغير طرديا مع x وعكسيا مع z

للعودة إلى محتويات قسم الجبر
اضغط هنا

• المتتابعات والمتسلسلات

المتتابعات

المتتابعة الحسابية	المتتابعة الهندسية
في المتتابعة الحسابية يكون الفرق ثابت ويسمى الفرق الثابت أساس المتتابعة ويرمز للأساس d لإيجاد الحد الذي يليه في المتتابعة الحسابية نضيف الأساس d	في المتتابعة الهندسية تكون النسبة ثابته وتسمى النسبة الثابته أساس المتتابعة الهندسية ويرمز للأساس r لإيجاد الحد الذي يليه في المتتابعة الهندسية نضرب بالأساسr
مثال: -28 , -17 , -6 , 5 , ……..	مثال: -2 , 6 -18 , 54 , ……..
-28 , -17 , -6 , 5 , 16 +11 , +11 , +11 , +11	-2 , 6 , -18 , 54 , -162 $\times -3$, $\times -3$, $\times -3$, $\times -3$ $\frac{6}{-2} = -3$, $\frac{-18}{6} = -3$, $\frac{54}{-18} = -3$

المتسلسلات

حسابية	هندسية
الحد النوني $a_n = a_1 + (n-1)d$ المجموع $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	الحد النوني $a_n = a_1 r^{n-1}$ المجموع $s_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

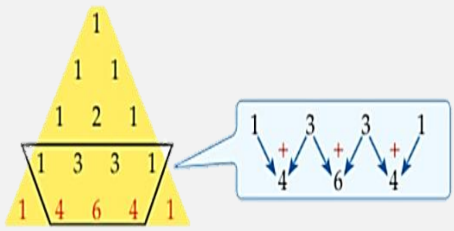
المتسلسلات الهندسية اللانهائية

تباعدية	تقاربية
اذا كان الأساس $\lvert r\rvert \geq 1$ ليس لها مجموع	اذا كان الأساس $\lvert r\rvert < 1$ يكون لها مجموع $S_{\infty} = \dfrac{a_1}{1-r}$

إيجاد المفكوك

مثلث باسكال

$(a+b)^0$
$(a+b)^1$
$(a+b)^2$
$(a+b)^3$
$(a+b)^4$



فيكون مفكوك $(a+b)^4$ هو

الأسس تبدأ من 4 وتتناقص إلى صفر

$$(a+b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4$$

الأسس تبدأ من صفر و تتزايد إلى 4

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

لاحظ أن عدد الحدود في مفكوك $(a+b)^4$ هو 5 حدود ، ومجموع الأسس في كل حد هو 4

نظرية ذات الحدين

$$(n+b)^n = {}_nc_0a^nb^0 + {}_nc_1a^{n-1}b^1 + {}_nc_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nc_na^0b^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} {}_nc_k a^{n-k}\, b^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\; a^{n-k}\, b^k$$

إيجاد قيمة حد معين

$$t_{k+1} = {}_n C_k a^{n-k} b^k$$

للعودة إلى محتويات قسم الجبر
اضغط هنا

محتويات قسم الهندسة	
المستقيمات	الفرق بين المستقيمات – أنواع المستقيمات – قوانين – إيجاد الميل – حالات الميل –ميل المستقيم –صيغ معادلات المستقيم
الزوايا	أنواع الزوايا – الزوايا الناتجة من تقاطع مستقيمين – الزوايا المتتامة والمتكاملة – الزوايا الناتجة من مستقيمين متوازيين ويقطعهما مستقيم ثالث
المضلعات	أنواعه – زوايا المضلع – المضلعات المتشابهة – المضلعات المتطابقة
الأشكال الثنائية الأبعاد	الأشكال الرباعية _ المثلثات – الدائرة
الأشكال الثلاثية الأبعاد	المنشور- الأسطوانة – الكرة – الهرم -المخروط
التحويلات الهندسية	الانعكاس – الإزاحة (الانسحاب) - الدوران
تركيبات التحويلات الهندسية	التماثل – التمدد
القطوع المخروطية	القطع المكافئ - القطع الناقص – القطع الزائد تصنيف القطوع المخروطية باستعمال المميز
تحليل الدوال	العلاقات والدوال –إيجاد المجال جبرياً – تحليل التمثيل البياني – تماثل العلاقات والدوال – الدوال الزوجية والفردية اطراد الدالة والقيم القصوى - النهاية –الاتصال –الدوال الرئيسية الأم – التحويلات الهندسية على الدوال الأم – العمليات على الدوال – تركيب د التين – الدالة العكسية
النهايات والأشتقاقات	

الهندسة

المستقيمات

الفرق بين

المستقيم

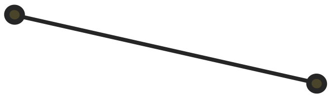
- مجموعة غير منتهية من النقاط، و يمتد من الطرفين ليس له بداية وليس له نهاية .

الشعاع

- مستقيم له بداية وليس له نهاية

القطعة المستقيمة

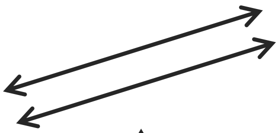
- مستقيم له بداية وله نهاية .



انواع المستقيمات

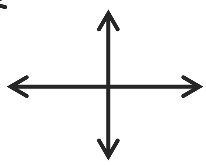
المتوازية

- مستقيمان لا يتقاطعان ابدا ويقعان في المستوى نفسه.



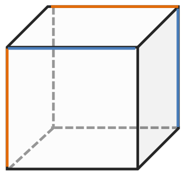
المتعامدة

- مستقيمان متقاطعان يحددان أربع زوايا قائمة.



المتخالفة

- هما مستقيمان لا يتقاطعان ولا يقعان في المستوى نفسه.



قوانين

المسافة بين نقطتين

- المسافة بين $(x_1 ، y_1)$ و $(x_2 ، y_2)$ هي: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

نقطة المنتصف

- منتصف قطعة مستقيمة $(x_1 ، y_1)$ و $(x_2 ، y_2)$ هي: $\left(\frac{x_1 + x_2}{2} ، \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$

المسافة بين نقطة ومستقيم

- فهي عبارة عن طول العمود النازل من النقطة على المستقيم ، البعد بين النقطة $(x_1 ، y_1)$ والمستقيم $ax + by + c =$

$$\frac{| ax_1 + by_1 + c |}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ايجاد الميل

من الرسم

- هو نسبة التغير الرأسي الي التغير الافقي. $m = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الافقي}}$

بين نقطتين

- هو نسبة التغير في الاحداثي y إلى التغير في الاحداثي x. $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

من زاوية

- هو ظل الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور x. $m = \tan\theta$

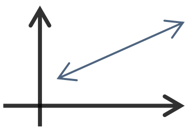
من معادلة

- $y = mx + b$ هو معامل x بشرط ان معامل y يساوي 1. $y = 8x + 5$ ، $m = 8$

حالات الميل

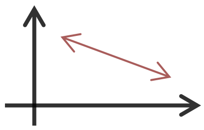
موجب

- المستقيم للأعلى عند التحرك من اليسار الي اليمين.



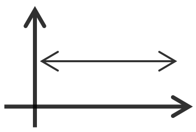
سالب

- المستقيم للأسفل عند التحرك من اليسار الي اليمين.



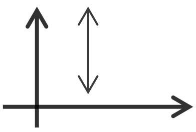
صفر

- اذا كان المستقيم افقي (موازي لمحور X).



غير معرف

- اذا كان المستقيم رأسي (مواز لمحور y).



ميل المستقيم

المتوازيين

- الميل الخاص بكل منهما يكون متساوي.

مثال/ $y = 8x + 5$ ميل المستقيم الموازي له = 8

المتعامدين

- يكون الميل الخاص بأحدهما هو معكوس مقلوب الميل الخاص بالمستقيم الآخر، وبالتالي يكون ناتج حاصل ضرب ميل المستقيمين المتعامدين يساوي سالب واحد.

مثال/ $y = 8x + 5$ ميل المستقيم العامودي عليه = $\frac{-1}{8}$ للتحقق $8 \times \frac{-1}{8} = -1$

صيغ معادلات المستقيمات

صيغة الميل والمقطع

$y = mx + b$ حيث m ميل المستقيم، b مقطع المحور Y .

مثال/ معادلة مستقيم ميله 6 ويقطع محور y عند 3 هي: $y = 6x + 3$

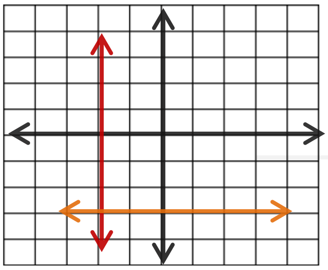
صيغة الميل ونقطة

$y - y_1 = m(x - x_1)$ حيث $(x_1 ، y_1)$، احداثيات أي نقطة على المستقيم

مثال/ معادلة مستقيم يمر بالنقطة (7 ،2) وميله 9 هي: $y - 2 = 9(x - 7)$

المستقيم الافقي

$y = b$، حيث b مقطع المحور y له ،، **مثال/** $y = -3$



المستقيم الرأسي

$x = a$، حيث a مقطع المحور x له،، **مثال/** $x = -2$

للعودة إلى محتويات قسم الهندسة
اضغط هنا

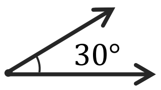
الهندسة

الزوايا

انواع الزوايا

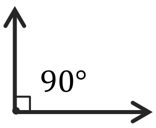
الزّوايا الحادة

- هي الزّوايا التي قياسها أكبر من °0 وأقل من °90.



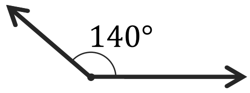
الزّوايا القائمة

- هي الزّوايا التي قياسها يساوي °90 تماماً.



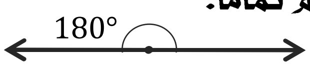
الزّوايا المُنفرجة

- هي الزّوايا التي قياسها أكبر من °90 وأصغر من°180.



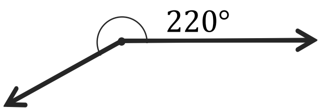
الزّوايا المستقيمة

- هي الزّوايا التي قياسها يساوي °180، وتبدو كخط مستقيم تماماً.



الزّوايا المُنعكِسة

- هي الزّوايا التي قياسها أكبر من °180 وأصغر من °360.



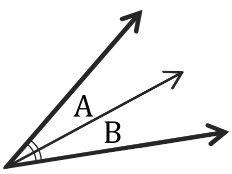
الزّوايا الكاملة أو الدائرية

- هي الزّوايا التي قياسها °360 ، بمعنى آخر هي لزّوايا التي تدور دورةً كاملةً؛ تدور دورةً كاملةً؛ حيث تبدأ من نقطة معيّنة وينتهي بها المطاف عند النقطة التي بدأت منها.

الزوايا الناتجة من تقاطع

الزوايا المتجاورة

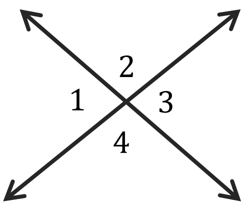
- وهما الزاويتان اللتان تشتركان معاً بضلع واحد، ورأس واحد.



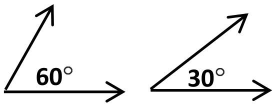
الزاويتان المتقابلتان بالرأس

- وهما الزاويتان اللتان تنتجان من تقاطع خطين مستقيمين معاً في نقطة واحدة تمثل رأس الزاويتين المتقابلتين، وتتساوي الزوايا المتقابلة بالرأس في قياسه وتكون أضلاعها على امتداد واحد.

(مثال : 1 ∠ و 3 ∠ متقابلتان بالرأس)

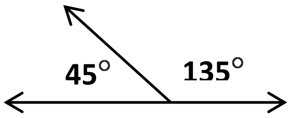


الزوايا المتتامة والمتكاملة



الزاويتان المتتامتان

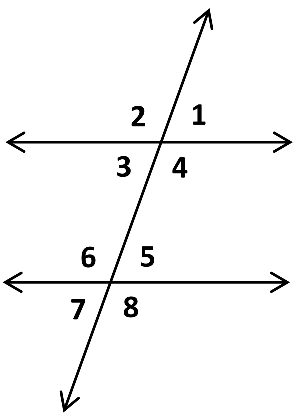
- هما الزاويتان اللتان يساوي مجموع قياسهما °90 درجة ، أي تشكلان معاً زاوية قائمة. (مثال الزاويتان°30 و° 60)



الزاويتان المتكاملتان

- وهما الزاويتان اللتان يساوي مجموع قياسها °180 درجة؛ أي تشكلان معاً زاوية المستقيمة.(مثال الزاويتان°135 و°45)

الزوايا الناتجة من مستقيمين متوازيين ويقطعهما مستقيم ثالث



الزوايا المتبادلة داخلياً

- هما الزاويتان الداخليتان الواقعتان في جهتين مختلفتين من القاطع وغير متجاورتين وقياسهما متساوي (مثال : 4 ∠ و 6 ∠)

الزوايا المتبادلة خارجياً

- هما الزاويتان الخارجيتان الواقعتان في جهتين مختلفتين من القاطع وغير متجاورتين وقياسهما متساوي (مثال : 1 ∠ و 7 ∠)

الزوايا المتناظرة

- هما الزاويتان الواقعتان في جهة واحدة من القاطع ، احدهما داخلية والاخرى خارجية وغير متجاورتين وقياسهما متساوي (مثال: 1 ∠ و 5 ∠)

الزوايا المتحالفة

- هما الزاويتان الداخليتان الواقعتان في جهة واحدة من القاطع وغير متجاورتين وقياسهما يساوي °180 (مثال : 4 ∠ و 5 ∠)

للعودة إلى محتويات قسم الهندسة
اضغط هنا

المضلعات

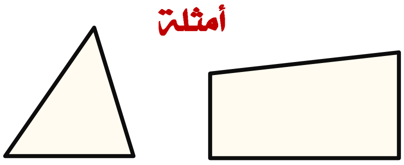
المضلع

هو شكل مغلق، يتكون من ثلاث قطع مستقيمة أو أكثر، تلتقي كل قطعة بطرفي قطعتين أخريين من المضلع، ولا تقع أي قطعتين منها على استقامة واحدة، وتكون رؤوس المضلع هي أطراف القطع المستقيمة

المضلع المحدب

- يكون قياس أي من زواياه الداخلية أقل من $180°$ ، ولا يقطع امتداد أي ضلع فيه أي ضلع آخر من أضلاع المضلع.

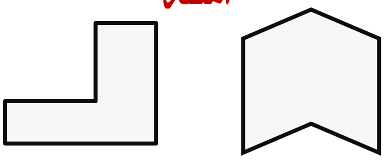
أمثلة



المضلع المقعر

- يكون قياس زاوية داخلية على الأقل منعكسة ذات قياس أكبر من $180°$ ، و يقطع امتداد أي ضلع فيه أي ضلع آخر من أضلاع المضلع.

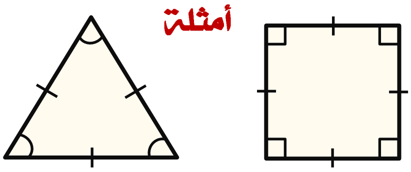
أمثلة



المضلع المنتظم

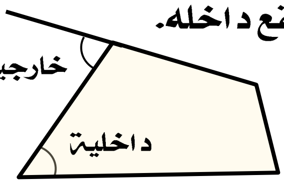
- هو مضلع جميع أضلاعه متطابقة (متساوية) وكذلك زواياه.

أمثلة



زوايا المضلع

- الزاوية الداخلية للمضلع المحدب: هي زاوية محصورة بين ضلعين متجاورين في مضلع وتقع داخله.
- الزاوية الخارجية للمضلع محدب: هي زاوية محصورة بين أحد أضلاعه وامتداد ضلع آخر.



القياس

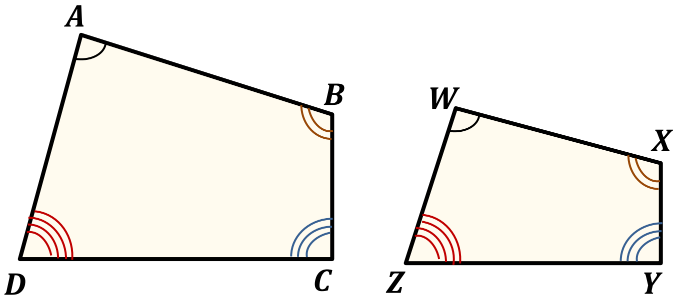
- لقياس الزوايا الداخلية لمضلع محدب عدد أضلاعه (n) يساوي $S = (n-2) \times 180°$
- لقياس الزاوية الداخلية الواحدة في مضلع المنتظم تقسيم مجموع الزوايا على عدد الأضلاع (n) تساوي $\frac{S}{n}$

- لقياس الزاوية الخارجية لمضلع منتظم عدد أضلاعه(n) يساوي $\frac{360°}{n}$
- لقياس الزاوية الخارجية لمضلع منتظم إيجاد قياس زاوية داخلية وطرح هذا القياس من $180°$.
- لقياس الزاوية الخارجية لمضلع محدب بأخذ زاوية واحدة عند كل رأس يساوي $360°$.

- لقياس عدد أضلاع مضلع منتظم علم قياس زاويته الداخلية x يساوي $n = \frac{360°}{180° - x}$

المضلعات المتشابهة

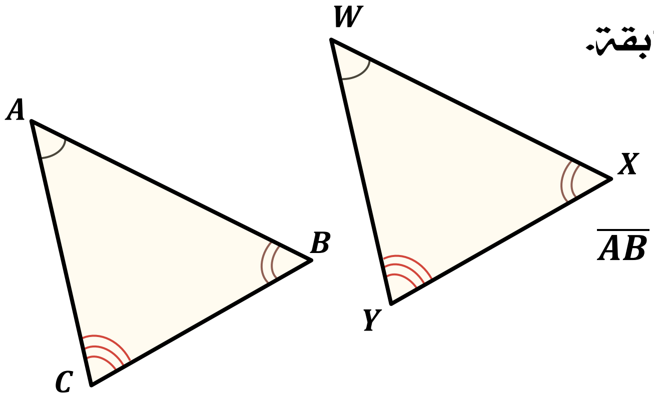
يتشابه مضلعان إذا وفقط إذا كانت زواياهما المتناظرة متطابقة وأطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.



- الزوايا المتطابقة : $\angle A \cong \angle W \quad \angle B \cong \angle X$
  $\angle D \cong \angle Z \quad \angle C \cong \angle Y$
- التناسب : $\dfrac{AB}{WX} = \dfrac{BC}{XY} = \dfrac{CD}{YZ} = \dfrac{DA}{ZW}$
- الرموز : $ABCD \sim WXYZ$

المضلعات المتطابقة

يتطابق مضلعان إذا وفقط إذا كانت عناصرهما المتناظرة متطابقة.



- الزوايا المتطابقة : $\angle A \cong \angle W \quad \angle B \cong \angle X$
  $\angle C \cong \angle Y$
- الأضلاع المتناظرة : $\overline{AB} \cong \overline{WX} \ , \ \overline{BC} \cong \overline{XY} \ , \ \overline{CA} \cong \overline{YW}$
- الرموز : $ABC \cong WXY$

للعودة إلى محتويات قسم الهندسة
اضغط هنا

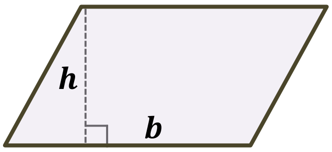
الأشكال الثنائية الأبعاد

الأشكال الرباعية

- هو عبارة عن مضلعات تتكون من 4 قطع مستقيمة أي لها : 4 أضلاع، 4 زوايا، 4 رؤوس.
- مجموع زوايا الشكل الرباعي $360°$.
- تصنيف الأشكال الرباعية: متوازي الأضلاع، المستطيل، المربع، المعين، شبه المنحرف

▪ متوازي الأضلاع

- هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان. ويرمز لمتوازي الأضلاع بالرمز ▱ .

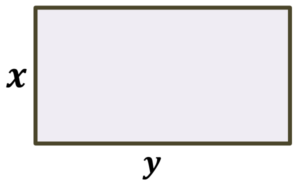


❖ كل ضلعين متقابلين متطابقان.
❖ القطران ينصف كل منهما الآخر.
❖ كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.
❖ القطر يقسمه إلى مثلثين متطابقين.
❖ إذا كانت إحدى زواياه قائمة، فإن زواياه الأربع قوائم.

المساحة (A) تساوي ناتج ضرب القاعدة في الارتفاع $A = b\,h$

المحيط (P).يساوي مجموع أطوال أضلاعه الأربعة $P = a + a + b + b = 2a + 2b$

▪ المستطيل



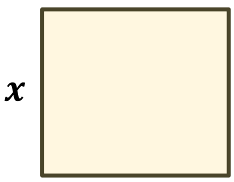
- هو متوازي أضلاع فيه أربع زوايا قائمة.

❖ الزوايا الأربع قوائم.
❖ كل ضلعين متقابلين متوازيان ومتطابقان.
❖ كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.
❖ القطران ينصف كل منهما الآخر.
❖ كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.

المساحة (A) تساوي حاصل ضرب الطول في العرض. $A = x\,y$

المحيط (P) يساوي مثلا مجموع الطول والعرض. $P = 2x + 2y$

▪ المربع



- هو متوازي أضلاع فيه أربع زوايا قائمة. وأربع أضلاع متطابقة .

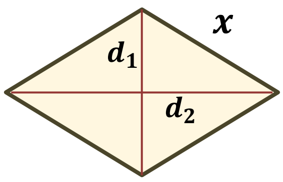
❖ الزوايا الأربع قوائم.
❖ كل ضلعين متقابلين متوازيان ومتطابقان.
❖ كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.
❖ القطران ينصف كل منهما الآخر.
❖ كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.

المساحة (A) تساوي طول الضلع تربيع $A = x^2$

المحيط (P) يساوي مجموع أطوال أضلاعه الأربعة. $P = x + x + x + x = 4x$

الهندسة

▪ المعين



- هو متوازي أضلاع جميع أضلاعه متطابقة.

❖ كل ضلعين متقابلين متوازيين.
❖ الأقطار تنصف بعضها البعض..
❖ كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.
❖ كل قطر ينصف زاويتان متقابلتان.
❖ الأقطار متعامدة.
❖ القطر يقسمه إلى مثلثين متساويا الساقين ومتطابقين.

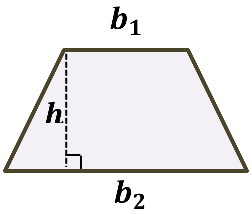
المساحة (A) تساوي نصف حاصل ضرب قطريه $A = \frac{1}{2} \times d_1.d_2$

المحيط (P) يساوي مجموع أطوال أضلاعه الأربعة. $P = x + x + x + x = 4x$

▪ شبه المنحرف

- هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متوازيان يُسميان قاعدتي شبه المنحرف .

❖ متطابق الساقين هو الذي تكون ساقاه متساويتان، ولكنهما غير متوازيين، وقاعدتاه متوازيتان، وغير متساويتان، وتكون زاويتي كل قاعدة متطابقتان ، ويكون قطراه متطابقين .

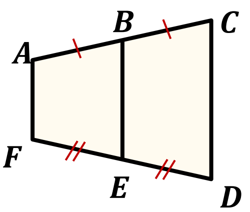


❖ قائم الزاوية هو الذي يحتوي على زاويتين قائمتين تقعان بين القاعدتين، وإحدى الساقين.
❖ منفرج الزاوية هو الذي يحتوي على زاوية منفرجة بين القاعدة، وإحدى الساقين.
❖ حاد الزوايا هو الذي تكون زاويتاه المحصورتان بين القاعدة الأطول وبين الساقين حادتان.

المساحة (A) تساوي نصف ناتج ضرب الارتفاع في مجموع القاعدتين. $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$

المحيط (P) يساوي مجموع أطوال أضلاعه الأربعة . $P = a + b + c + d$

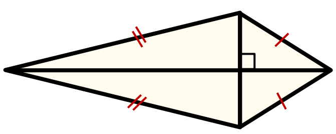
القطعة المتوسطة



- هي قطعة مستقيمة تصل بين منتصفي ساقيه، توازي كلا من القاعدتين.

طولها يساوي نصف مجموع طول القاعدتين $BE = \frac{1}{2}(AF + CD)$

شكل الطائرة الورقية



- هو شكل رباعي يتكون من زوجين متمايزين من الأضلاع المتجاورة المتطابقة

وعلى عكس متوازي الأضلاع، كل ضلعين متقابلين في شكل الطائرة ليسا متطابقين ولا متوازيين.

❖ القطران متعامدان.
❖ يوجد زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة، المتطابقة .

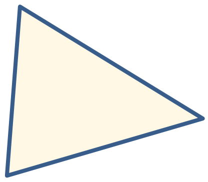
للعودة إلى محتويات قسم الهندسة
اضغط هنا

المثلثات

- المثلث شكل ذو ثلاث أضلاع وثلاث زوايا مجموعها $180°$.

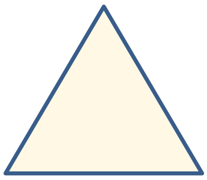
▪ تصنيف المثلثات وفقاً لزواياها

مثلث حاد الزوايا



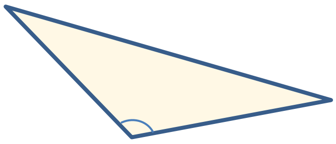
3 زوايا حادة

مثلث متطابق الزوايا



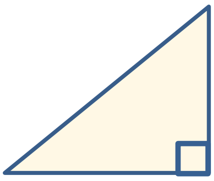
3 زوايا حادة متطابقة

مثلث منفرج الزوايا



إحدى الزوايا منفرجة

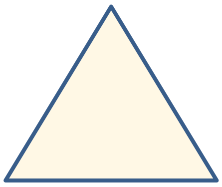
مثلث قائم الزوايا



إحدى الزوايا قائمة

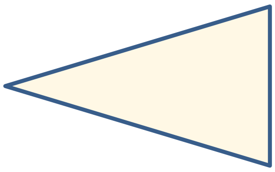
▪ تصنيف المثلثات وفقاً لأضلاعها

مثلث متطابق الأضلاع



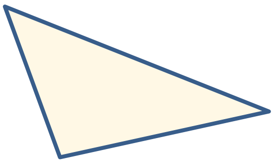
3 أضلاع متطابقة

مثلث متطابق الضلعين



ضلعان على الأقل متطابقان

مثلث مختلف الأضلاع

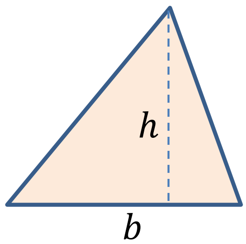


لا توجد أضلاع متطابقة

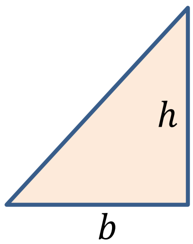
▪ أنواع المثلث

- إذا علمت أن A تمثل مساحة المثلث ، b تمثل القاعدة، h تمثل الارتفاع.

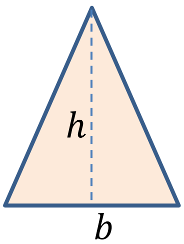
العادي



القائم



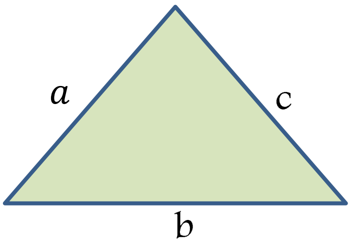
المتطابق الضلعين



المساحة

$$A = \frac{1}{2} b\,h$$

معلوم أطوال أضلاعه

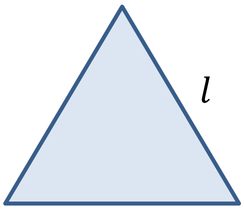


$m = \frac{a+b+c}{2}$ نصف طول المحيط

المساحة

$$A = \sqrt{m(m-a)(m-b)(m-c)}$$

متطابق الأضلاع



حيث l طول الضلع

المساحة

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$

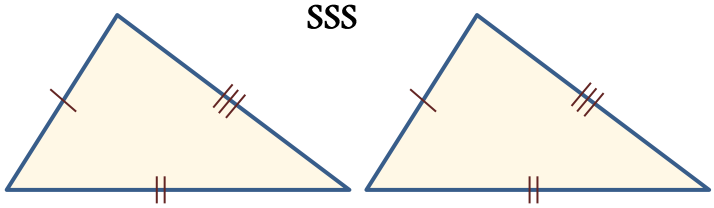
- محيط المثلث (P) يساوي مجموع أطوال أضلاعه .

$$P = a + b + c$$

▪ حالات تطابق المثلثات

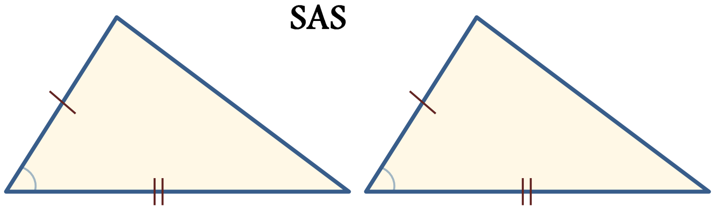
إثبات تطابق المثلثات

SSS



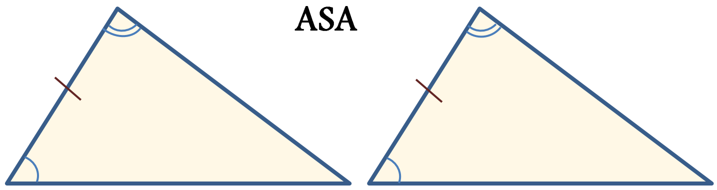
الأزواج الثلاثة من الأضلاع المتناظرة متطابقة

SAS



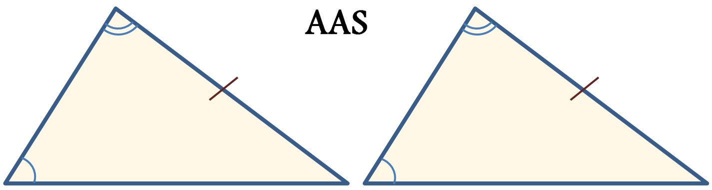
تطابق زوجين من الأضلاع المتناظرة والزاويتين المحصورتين بينهما

ASA



تطابق زوجين من الزوايا المتناظرة والضلعين المحصورين بينهما

AAS

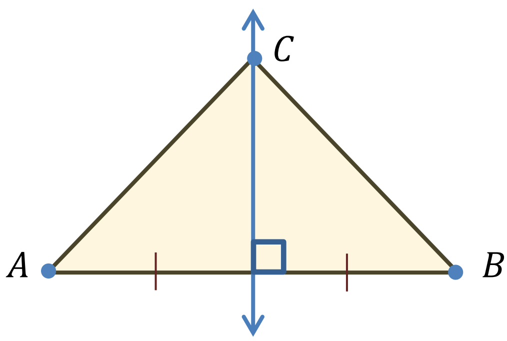


تطابق زوجين من الزوايا المتناظرة وضلعين غير محصورين

▪ العلاقات في المثلث

الأعمدة المنصفة

نظرية العمود المنصف

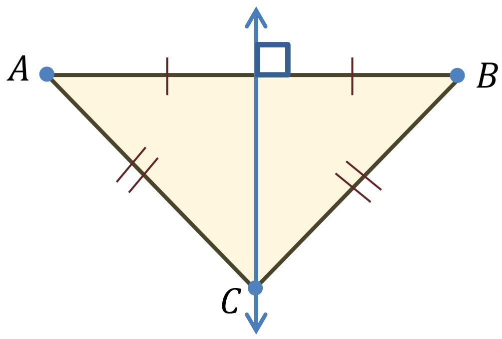


كل نقطة على العمود المنصف لقطعة مستقيمة تكون بعدين متساويين من طرفي القطعة المستقيمة .

مثال/ إذا كانت $\overline{CD}$ عموداً منصفاً لـ $\overline{AB}$

فإن $AC = BC$

عكس نظرية العمود المنصف



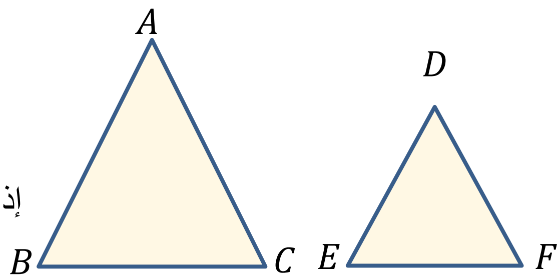
كل نقطة على بعدين متساويين من طرفي قطعة مستقيمة تقع على العمود المنصف لتلك القطعة.

مثال/ إذا كان $AE = BE$ فإن E تقع على $\overline{CD}$

وهو العمود المنصف لـ $\overline{AB}$

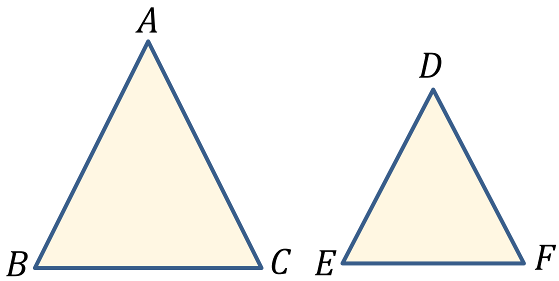
▪ تشابه المثلثات

- يمكن أن يكون لمثلثين نفس الشكل بدون أن يكونا بنفس الحجم عندها نقول أنهما متشابهين.



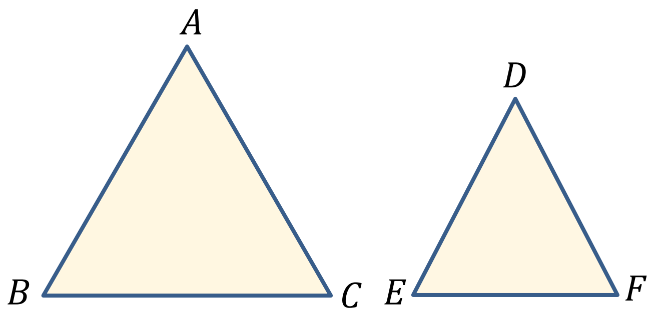
$$\left.\begin{aligned} m(\hat{A}) &= m(\hat{D}) \\ m(\hat{B}) &= m(\hat{E}) \end{aligned}\right\} => ABC \sim DEF$$

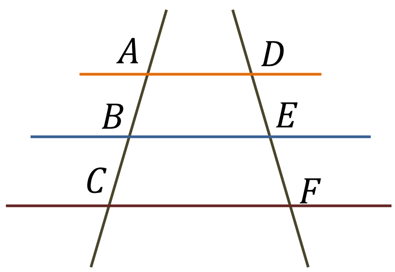
إذا تساوت زاويتين في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر، كان هذان المثلثان متشابهين.



$$\left.\begin{aligned} &\frac{|AB|}{|DE|}\frac{|BC|}{|EF|} \\ &m(\hat{B}) = m(\hat{E}) \end{aligned}\right\} => ABC \sim DEF$$

إذا تناسب ضلعين في مثلث مع ضلعين مثلث آخر، وكانت الزاوية بينهما متساوية عندها يتشابه المثلثان.



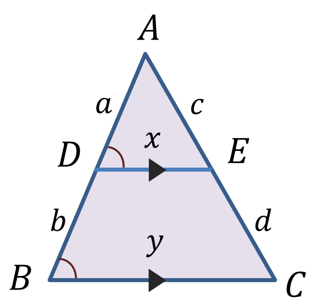


$$[AD] \backslash\backslash [BE] \backslash\backslash [CF]$$

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}$$

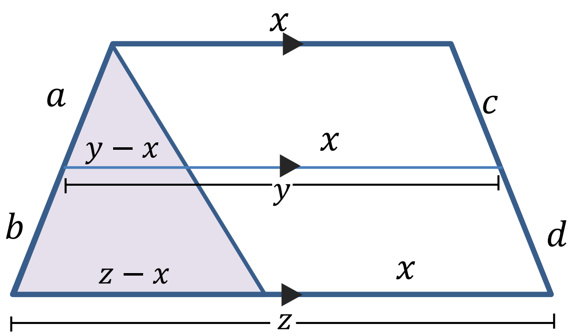
$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|DF|}$$

إذا تساوت نسب الأضلاع الثلاثة في مثلثين نقول عنهما متشابهين. $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} => ABC \sim DEF$



$$[DE] \backslash\backslash [BC] => ABC \sim ADE$$

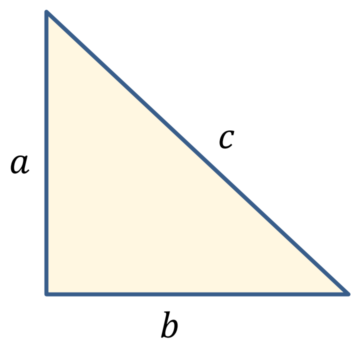
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{x}{y}$$



$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \frac{a}{a+b} = \frac{y-x}{z-x}$$

نظريات

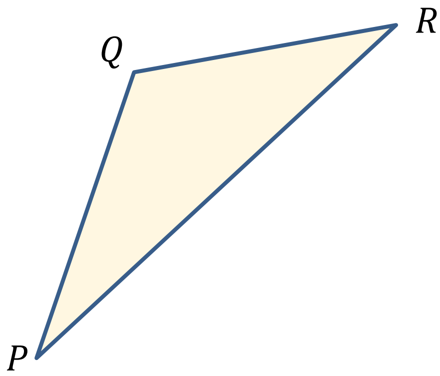
نظرية فيثاغورس



إذا كان المثلث قائم الزاوية فإن مربع الوتر يساوي مجموع مربعي ضلعيه (ساقيه)

$$c^2 = a^2 + b^2$$

نظرية متباينة المثلث



مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

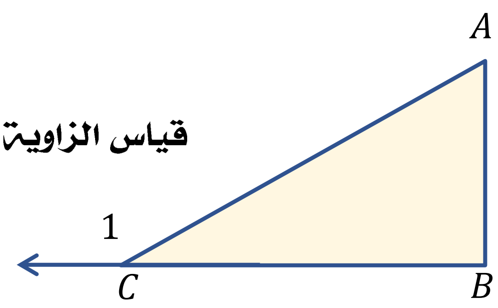
أمثلة/

$$PQ + QR > PR$$

$$QR + PR > PQ$$

$$PR + PQ > QR$$

نظرية الزاوية الخارجية

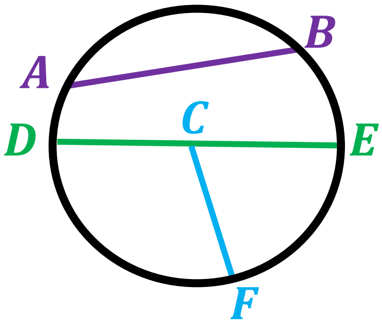


قياس الزاوية الخارجة في مثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخليتين البعيدتين.

مثال/ $m < A + m < B = m < 1$

الدائرة

❖ قطع مستقيمة خاصة في الدائرة



❖ $\overline{AB}$ قطعة مستقيمة يقع طرفيها على محيط الدائرة تسمى الوتر.

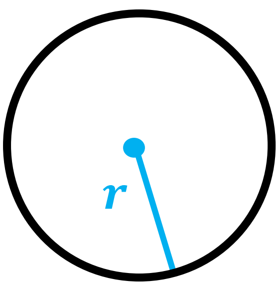
❖ $\overline{DE}$ قطعة مستقيمة تمر بمركز الدائرة تسمى القطر ويسمى وتر ايضاً.

❖ $\overline{FC}$ قطعة مستقيمة يقع أحد طرفيها على محيط الدائرة والطرف الاخر على مركز الدائرة تسمى نصف القطر.

❖ العلاقة بين القطر ونصف القطر

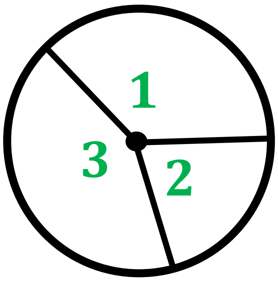
- إذا كان نصف قطر الدائرة r وقطرها d فإن ..
- صيغة نصف القطر، $r = \frac{d}{2}$ أو $r = \frac{1}{2}d$
- صيغة القطر، $d = 2r$

❖ مساحة ومحيط الدائرة



مساحة الدائرة	محيط الدائرة
$A = r^2\pi$	$A = 2r\pi$

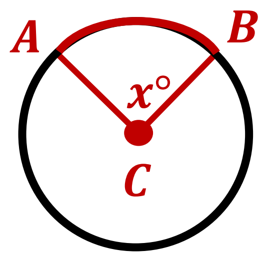
❖ قياس الزوايا والأقواس



- مجموع قياسات الزوايا المركزية في الدائرة والتي لا تحتوي على نقاطاً داخلية مشتركة يساوي $360°$

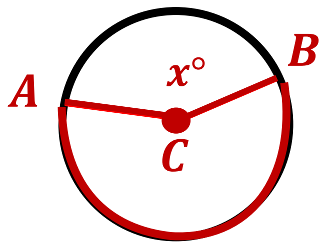
$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 360°$$

❖ الأقواس وقياسها وأنواعها



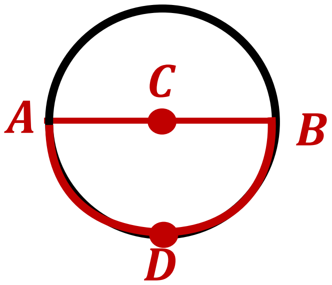
- **القوس الأصغر**

وهو الذي يقل قياسه عن $180°$ ويساوي قياس الزاوية المركزية المقابلة له.



- **القوس الأكبر**

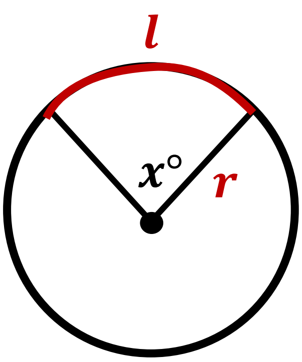
وهو الذي يزيد قياسه عن $180°$ ويساوي $360°$ مطروح منه قياس القوس الصغير.



- **نصف القوس**

وهو الذي قياسه يساوي $180°$

❖ طول القوس



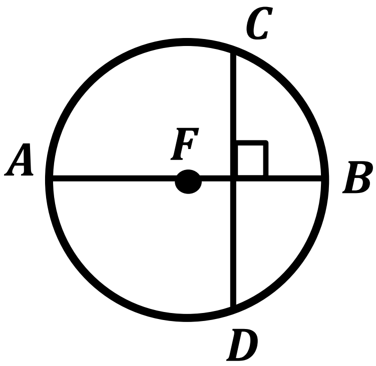
يعطى بالعلاقة التالية $l = \frac{x°}{360°} \times 2\pi r$

حيث : l : طول القوس

$x°$: الزاوية المركزية المشتركة مع القوس l

r: نصف قطر الدائرة

❖ الأقواس والأوتار

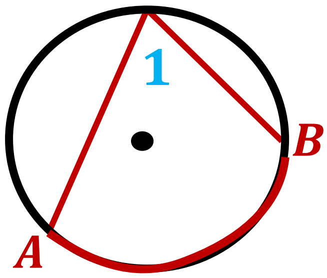


- **نظرية :**

إذا كان قطر أو نصف قطر الدائرة عمودياً على وتر فيها فإنه ينصف ذلك الوتر وينصف قوسه .

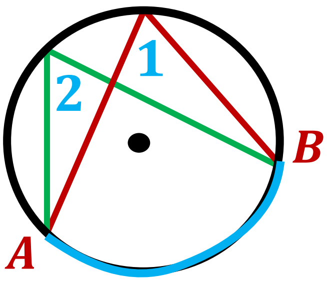
والعكس صحيح لهذي النظرية

❖ الزاوية المحيطية



- **الزاوية المحيطية تساوي نصف القوس المقابل لها**

$$m\angle 1 = \frac{1}{2} m\widehat{AB}$$

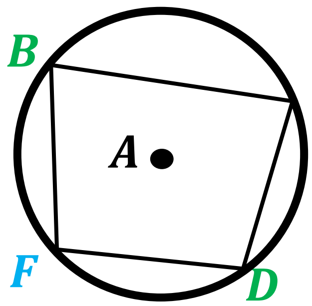


- **إذا قابلت زاويتان محيطيتان في دائرة القوس نفسه أو قوسين متطابقين فإن الزاويتين متطابقتين**

الزاوية 1 تقابل القوس $\widehat{AB}$

الزاوية 2 تقابل القوس $\widehat{AB}$

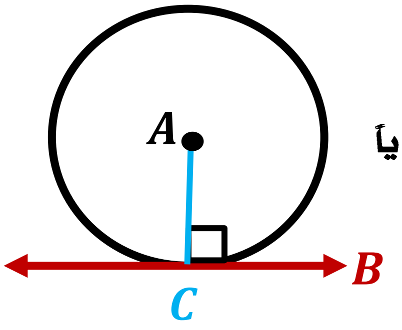
إذاً $1 \cong 2$



نظرية :

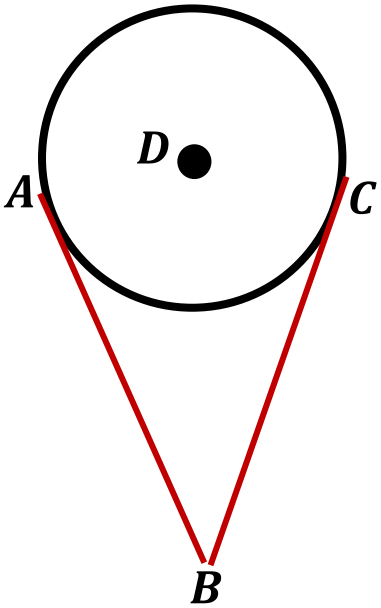
- **إذا كان الشكل الرباعي محاطاً بدائرة فإن كل زاويتين متقابلتين متكاملتين بمعنى $\angle B$ و $\angle D$ متكاملتان و $\angle F$ و $\angle C$ متكاملتان**

نظرية :



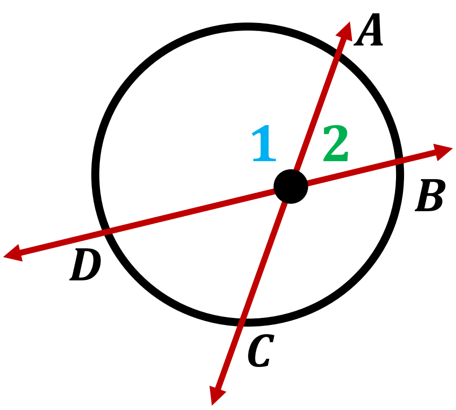
- يكون المستقيم مماساً لدائرة في المستوى نفسه إذا وفقط إذا كان عمودياً على نصف القطر عند نقطة التماس

نظرية :



- إذا رُسمت قطعتان مستقيمتان مماستان لدائرة من نقطة خارجها فإنهما متطابقتان . $\overline{AB}$ ، $\overline{CB}$ مماسان لـ $\odot D$
إذاً $\overline{AB} \cong \overline{CB}$

نظرية :

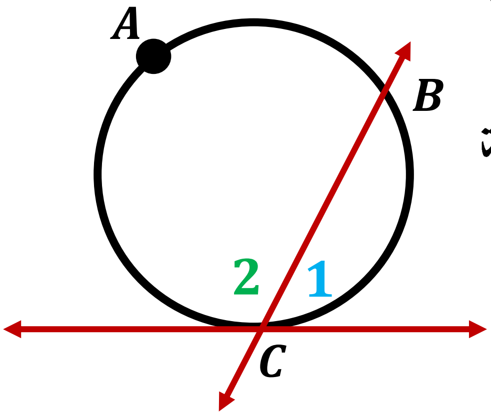


- إذا تقاطع قاطعان أو وتران فإن قياس الزاوية المتكونة منه التقاطع تساوي نصف مجموع قياسي القوس المقابل لهذه الزاوية والقوس المقابل للزاوية التي تقابلها بالرأس .

$m\angle 2 = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + m\widehat{DC})$ و $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{AD} + m\widehat{BC})$

❖ الزاوية المماسية

نظرية :

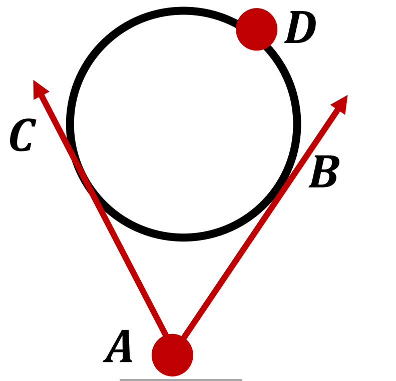


- إذا تقاطع مماس وقاطع عند نقطة التماس فإن قياس كل زاوية متكونة من القاطع تساوي
- نصف قياس القوس المقابل لها.

$m\angle 2 = \frac{1}{2}(m\widehat{CAB})$ و $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{BC})$

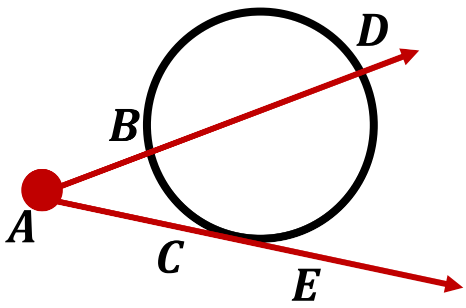
نظرية :

- إذا تقاطع قاطعان أو قاطع ومماس أو مماسان في نقطة خارج دائرة فإن قياس الزاوية المكونة تساوي نصف الفرق الموجب بين قياسي القوسين المقابلين لها.



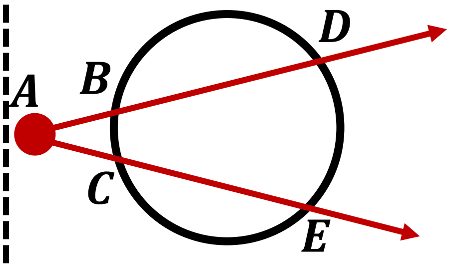
- مماسان

$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{CDB} - m\widehat{BC})$



- مماس وقاطع

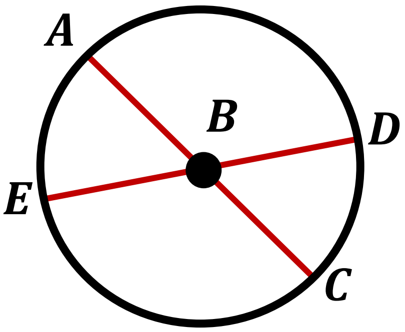
$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{DE} - m\widehat{BC})$



- قاطعان

$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{DE} - m\widehat{BC})$

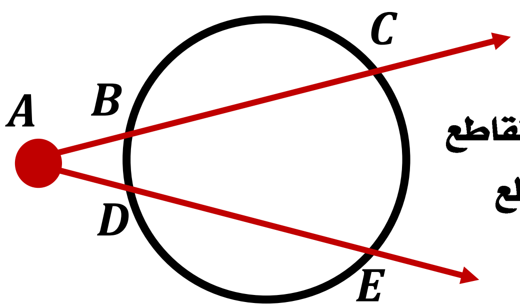
نظرية قطع الوتر :



- إذا تقاطع وتران في دائرة فإن حاصل ضرب طولي جزأي الوتر الأول يساوي حاصل ضرب طولي جزأي الوتر الثاني .

$AB.BC = DB.BE$

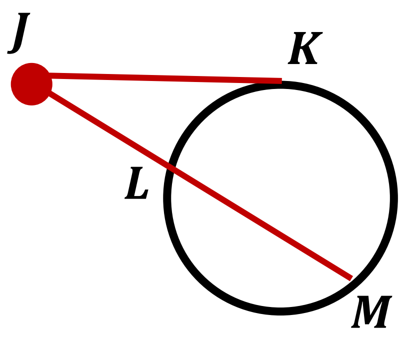
نظرية القاطع :



- إذا رُسم قاطعان لدائرة من نقطة خارجها فإن حاصل ضرب طول القاطع الأول في طول الجزء الخارجي منه يساوي حاصل ضرب طول القاطع الثاني في طول الجزء الخارجي منه .

$$AC.AB = AE.AD$$

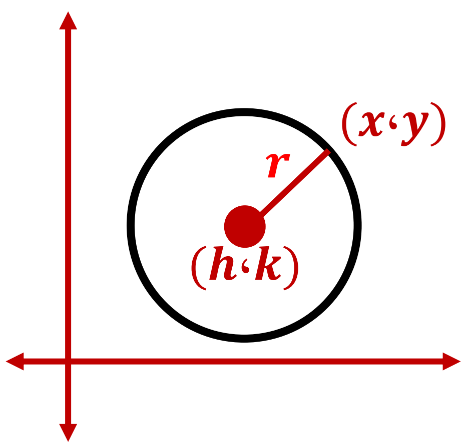
نظرية :



- إذا رُسم مماس وقاطع لدائرة من نقطة خارجها فإن مربع طول المماس يساوي حاصل ضرب طول القاطع في طول الجزء الخارجي منه.

$$JK^2 = JL.JM$$

الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة :



- الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h،k) وطول نصف قطرها r هي

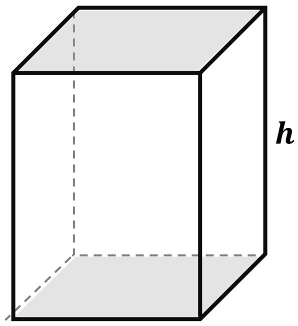
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

للعودة إلى محتويات قسم الهندسة
اضغط هنا

الأشكال الثلاثية الأبعاد

المنشور

- مجسم له قاعدتان مضلعتان متطابقتان. جميع الأوجه الجانبية للمنشور مستطيلات. له رؤوس وله أحرف. يسمى المنشور على شكل قاعدته: ثلاثي ، رباعي ، خماسي..........



حجم النشور (V) $\quad V = A\,h$

يساوي ناتج ضرب مساحة القاعدة (A) في الارتفاع (h)

المساحة الجانبية (L) $\quad S_L = P\,h$

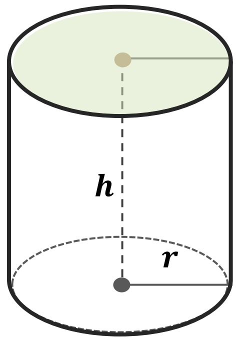
لسطح منشور تساوي ناتج ضرب محيط القاعدة (P) في الارتفاع (h).

المساحة الكلية (S_T) $\quad S_T = S_L + 2A$

لسطح المنشور تساوي مجموع المساحة الجانبية ومساحة القاعدتين.

الأسطوانة

- مجسم قاعدتاه دائريتان متطابقتان. قاعدتاه متصلتان بجانب منحن. ليس لها رؤوس ولا أحرف.



حجم الأسطوانة (V) $\quad V = A\,h$

يساوي ناتج ضرب مساحة القاعدة (A) في الارتفاع (h).

المساحة الجانبية (S_L) $\quad S_L = P\,h$

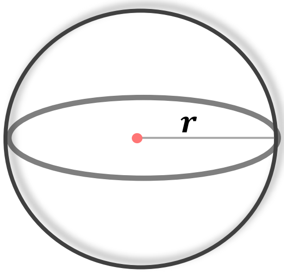
لسطح الأسطوانة تساوي ناتج ضرب محيط القاعدة (P) في الارتفاع (h).

المساحة الكلية (S_T) $\quad S_T = S_L + 2A$

لسطح الأسطوانة تساوي مجموع المساحة الجانبية ومساحة القاعدتين.

الكرة

- ليس لها قاعدة. ليس لها أوجُهٌ. ليس لها رؤوس وليس لها أحرف .



حجم الكرة (V) $\quad V = \frac{4}{3}\pi r^3$

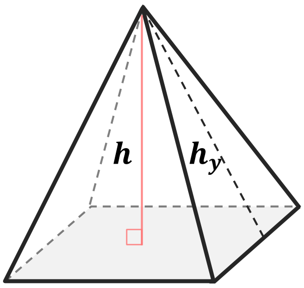
تساوي $\frac{4}{3}$ ناتج ضرب π في مكعب نصف القطر (r).

مساحة سطح الكرة (S_T) $\quad S_T = 4\,\pi r^2$

تساوى اربعة اضعاف مساحة دائرة.

الهرم

- مجسم قاعدته الوحيدة مضلع. أوجُهُهُ الجانبية مثلثات. له رؤوس وله أحرف. يسمى الهرم على شكل قاعدته: ثلاثي ، رباعي، خماسي ....



حجم الهرم (V) $$V=\frac{1}{3}A\,h$$

يساوي ثلث ناتج ضرب مساحة القاعدة(A) في الارتفاع(h).

المساحة الجانبية(A_y) $$S_L=\frac{1}{2}P\,h_y$$

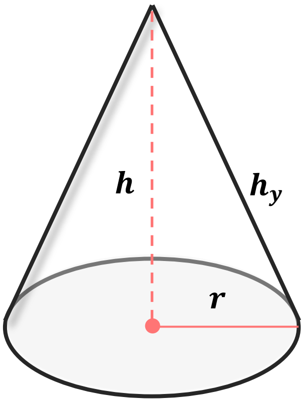
لسطح الهرم المنتظم تساوي نصف محيط القاعدة (P) مضروبا في الارتفاع الجانبي(h_y).

المساحة الكلية (S_T) $$S_T=S_L+A$$

لسطح الهرم المنتظم تساوي مجموع المساحة الجانبية ومساحة القاعدة.

المخروط

- مجسم قاعدته الوحيدة دائرية. قاعدته متصلة بالرأس بجانب منحن. له رأس واحد.



حجم المخروط (V) $$V=\frac{1}{3}A\,h$$

يساوي ثلث ناتج ضرب مساحة القاعدة(A) في الارتفاع (h).

المساحة الجانبية(L) $$S_L=\pi r\,h_y$$

لسطح لمخروط تساوي ناتج ضرب π في نصف القطر(r) في الارتفاع الجانبي(h_y).

المساحة الكلية (S_T) $$S_T=S_L+A$$

لسطح المخروط تساوي مجموع المساحة الجانبية ومساحة القاعدة.

للعودة إلى محتويات قسم الهندسة
اضغط هنا

تحويلات تطابق الصورة الناتجة مطابقة للشكل الأصلي مثال : الانعكاس ، الدوران ، الازاحة + التحويلات المركبة منها.

تحويلات تشابه الصورة الناتجة تشبه الشكل الأصلي مثال : التمدد.

• الانعكاس

هو تحويل هندسي يحفظ الأبعاد للشكل ويعكس الشكل حول مستقيم يسمى محور الانعكاس ، بمعنى تحول شكل ما إلى صورة مرآته المعكوسة ، بحيث يكون بُعد النقطة و بُعد صورتها عن محور الانعكاس متساويين.

- اذا كانت النقطة واقعة على محور الانعكاس فإن صورتها هي النقطة نفسها .
- اذا كانت النقطة غير واقعة على محور الانعكاس يكون محور الانعكاس هو العمود المنصف للقطعة المستقيمة التي تصل بين النقطة و صورتها

الانعكاس في المستوي الاحداثي			
الانعكاس حول محور x	الانعكاس حول محور y	الانعكاس حول نقطة الاصل	الانعكاس حول المستقيم y=x
(x ,y)→ (x,-y)	(x ,y) → (-x,y)	(x ,y)→ (- x ,- y)	(x ,y)→ (y,x)
(3,5)→ (3,-5)	(3,5)→ (- 3,5)	(3,5)→ (-3 ,-5)	(3,5)→ (5,3)

• الإزاحة (الانسحاب)

تحويل هندسي متجه ينقل كل نقطة الى صورتها مسافة محددة في اتجاه محدد .

تحويل هندسي متجه ينقل كل نقطة الى صورتها مسافة محددة في اتجاه محدد .

دلالات الكلمات في الازاحة : يمين (اضافة) ، يسار (طرح) مع الاحداثي x ،، أعلى (اضافة)،اسفل (طرح) مع الاحداثي y

(x , y)→ (x + a , y + b) (نضيف مقدار الازاحة للإحداثيات)

الإزاحة في المستوي الاحداثي	
أوجد صورة النقطة (3، -2) وفق القاعدة (x , y) →(x+7 , y + 4) (-2 , 3) →(-2+7 , 3+4) →(5 ,7)	أوجد صورة النقطة (3 ، -2) بإزاحة مقدارها سبع وحدات الي اليمين و اربع وحدات الي أعلى ازاحة سبع وحدات الي اليمين تعني نضيف 7 للإحداثي x ازاحة اربع وحدات الي اعلى تعني نضيف 4 للإحداثي y (-2 , 3) →(-2+7 , 3+4) →(5 ,7)

• الدوران

الدوران حول النقطة ثابته تسمي مركز الدوران بزاويه معينة قياسها x° واتجاه معين يحول النقطة الي صورتها بحيث

اذا كانت النقطة هي مركز الدوران فإن صورتها هي النقطة نفسها

اذا كانت النقطة غير مركز الدوران فإن النقطة الاصلية وصورتها تبعدان المسافة نفسها عن مركز الدوران والزاوية المتشكلة من النقطة ومركز الدوران و الصورة تسمي زاوية الدوران وقياسها يساوي x° .

الدوران في المستوي الاحداثي			
الدوران بزاوية 90	الدوران بزاوية 180	الدوران بزاوية 270	الدوران بزاوية 360
(x , y)→ (-y , x)	(x , y)→ (-x ,-y)	(x , y)→ (y,-x)	(x , y)→ (x , y)
(-1,8)→ (-8,-1)	(-1,8)→ (1,-8)	(-1,8)→ (8 , 1)	(-1,8)→ (-1, 8)

تركيبات التحويلات الهندسية

◆ **التحويل الهندسي المركب** : هو اجراء تحويل هندسي على شكل ما، ثم اجراء تحويل هندسي آخر على صورته .

ملاحظة مهمة : عند تركيب التحويلين الهندسيين نحول بالترتيب المحدد بالمسألة.

امثلة : اوجد صورة النقطة (5 ,7) الناتجة عن التحويل الهندسي المركب في كل مما يلي :

أ) ازاحة مقدارها 3 وحدات إلى اسفل ثم انعكاس حول المحور y

إضاءة: (الترتيب ازاحة ثم انعكاس) ،، ازاحة ثلاث وحدات الي اسفل تعني نطرح 3 من الإحداثي y

الحل: $(5\ ,\ 7) \xrightarrow{\text{ازاحة}} (5\ ,\ 4) \xrightarrow{\text{انعكاس حول } y} (-5,\ 4)$

ب) انعكاس حول المستقيم y=x ثم دوران بزاوية مقدارها 90

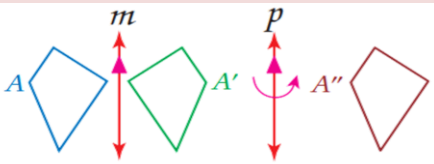
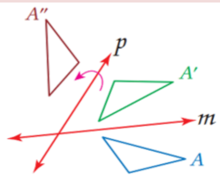
إضاءة: (الترتيب انعكاس ثم دوران)

الحل: $(5\ ,\ 7) \xrightarrow{\text{انعكاس حول المستقيم } y=x} (7\ ,\ 5) \xrightarrow{\text{دوران بزاوية } 90} (-5\ ,\ 7)$

جـ) دوران بزاوية مقدارها 180 ثم ازاحة وحدة الي اليسار و 4 وحدات إلي اعلى

إضاءة: (الترتيب دوران ثم ازاحة) ، ازاحة وحدة الي اليسار تعني نطرح 1 من لإحداثي x ، ازاحة 4 وحدات الي اعلى تعني نضيف 4 للإحداثي y

الحل: $(5\ ,\ 7) \xrightarrow{\text{دوران بزاوية } 180} (-5\ ,\ -7) \xrightarrow{\text{ازاحة}} (-6\ ,\ -3)$

تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين	تركيب انعكاسين حول مستقيمين متقاطعين
يمثل ازاحة	يمثل دوران
	
الازاحة الكلية تكون ضعف المسافة بين المستقيمين المتوازيين	زاوية الدوران الكلية هي ضعف الزاوية المحصورة بين المستقيمين المتقاطعين

التماثل: يكون الشكل الثنائي الابعاد متماثلا حول محور اذا كانت صورته ناتجة عن الانعكاس حول مستقيم ما هي الشكل نفسة ويسمي هذا المستقيم محور تماثل، بعض الاشكال ليس لها محور تماثل وبعضها لها محور واحد والبعض الاخر عدة محاور .

(التماثل الدوراني): يكون للشكل الثنائي الابعاد تماثل دوراني(او تماثل نصف قطري) عندما تكون صورته الناتجة عن الدوران بين 0 و 360 درجة حول مركزة هي الشكل نفسة. ويسمى مركز الدوران مركز التماثل(او نقطة التماثل).

رتبة التماثل: عدد المرات التي تنطبق فيها صورة الشكل على نفسه اثناء دورانه   **مقدار التماثل** = رتبة التماثل ÷ 360

مثال : الثماني المنتظم رتبته 8 و مقدار التماثل له 45 =8÷360

التمدد (تحويل تشابه):

هو تحويل هندسي يكبر الشكل أو يصغره بنسبة محددة تسمى معامل مقياس التمدد .

معامل مقياس التمدد : هو النسبة بين احد اطوال الصورة الي الطول المناظر لها في الشكل الاصلي ،

- اذا كان معامل مقياس التمدد اكبر من 1 فالتمدد تكبير ، اما اذا كان معامل مقياس التمدد اصغر من 1 فالتمدد تصغير.
- لإيجاد احداثيات الصورة الناتجة عن التمدد مركزه نقطة الاصل اضرب الاحداثيين x , y لكل نقطة في شكل الاصلي في k معامل مقياس التمدد .

مثال: اوجد صورة النقطة (4 ، 6) بتمدد معامله 2

(نضرب معامل مقياس) $(x\ ,\ y) \rightarrow (2x\ \ ,\ 2y)$ الحل $(6\ ,4) \rightarrow (12\ ,\ 8)$

للعودة إلى محتويات قسم الهندسة
اضغط هنا

القطع المكافئ

القطع المكافئ: هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط المستوية التي يكون بعد كل منها عن نقطة ثابتة مساوي لبعدها عن مستقيم معلوم .

المحل الهندسي : هو مجموعة النقاط التي تحقق خاصية هندسية معينة .

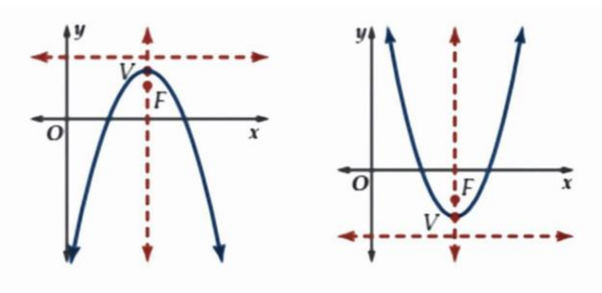
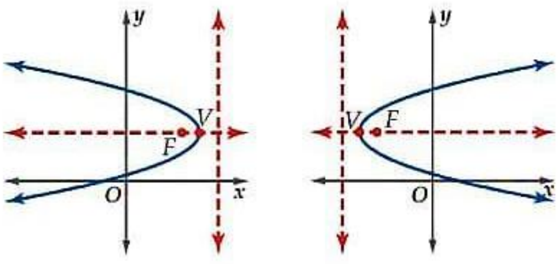
البؤرة : نقطة ثابتة .

الدليل : مستقيم ثابت معلوم .

محور التماثل : المستقيم الذي يتماثل حوله القطع المكافئ و العمودي على الدليل و المار بالبؤرة .

الرأس : هو نقطة تقاطع القطع المكافئ مع محور التماثل .

الوتر البؤري : القطعة المستقيمة المارة بالبؤرة و العمودية على محور التماثل .

الصورة القياسية للقطع المكافئ المفتوح رأسيا: $(x-h)^2 = 4C(y-k)$	الصورة القياسية للقطع المكافئ المفتوح افقيا : $(y-k)^2 = 4C(x-h)$
الرأس (h,k) البؤرة $(h\ ,k+C)$ معادلة محور التماثل $x = h$ معادلة الدليل $y = k - C$ طول الوتر البؤري $\|4C\|$ 	الرأس (h,k) البؤرة $(h+C\ ,k)$ معادلة محور التماثل $y = k$ معادلة الدليل $x = h - C$ طول الوتر البؤري $\|4C\|$ 

القطع الناقص

القطع الناقص : هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط مستوية يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقدارا ثابت .

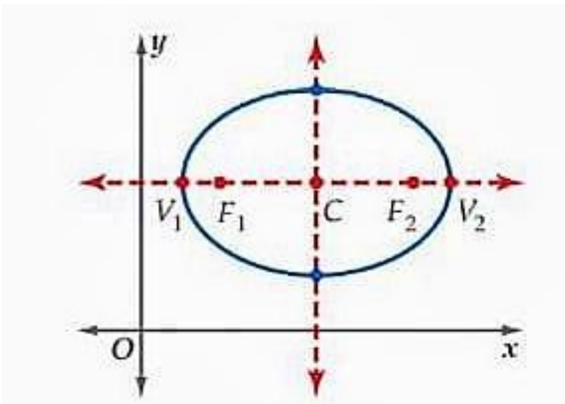
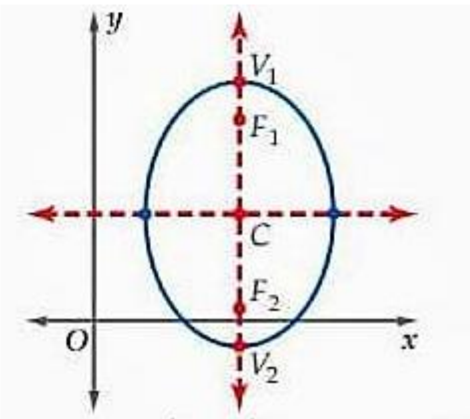
البؤرتين : النقطتين التي تبعد عنها جميع النقاط مقدار ثابت .

المحور الاكبر : هو القطعة المستقيمة التي تحوي البؤرتين و نهايتها على منحنى القطع الناقص .

المحور الاصغر : هو القطعة المستقيمة التي تمر بالمركز و نهايتها على المنحنى و متعامدة مع المحور الاكبر.

الرأسين : نهايتا المحور الاكبر .

الرأسين المرافقين : نهايتا المحور الاصغر .

الصور القياسية لمعادلة القطع الناقص	
المحور الأكبر أفقي: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	**المحور الأكبر رأسي:** $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$
	
المركز : (h,k)	المركز: (h,k)
البؤرتان: $(h\pm c\,,k)$	البؤرتان: $(h\,,k\pm c)$
الرأسان: $(h\pm a\,,k)$	الرأسان: $(h\,,k\pm a)$
الرأسان المرافقان: $(h,k\ \pm b)$	الرأسان المرافقان: $(h\pm b,k)$
المحور الأكبر y = k ، طوله 2a	المحور الأكبر x = h ، طوله 2a
المحور الأصغر x = h ، طوله 2b	المحور الأصغر y = k ، طوله 2b
العلاقة بين a ، b ، c : $c=\sqrt{a^2-b^2}$	العلاقة بين a ، b ، c: $c=\sqrt{a^2-b^2}$

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h,k) ونصف قطرها r هي

$$(x-h)^2+(y-k)^2=1$$

القطع الزائد

القطع الزائدة : هو المحل الهندسي لجميع النقاط المستوية التي يكون الفرق المطلق بين بعديها عن بؤرتين يساوي مقدارا ثابت .

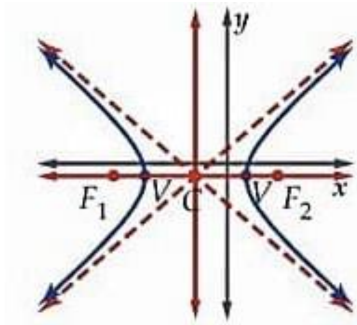
المحور القاطع : هو المحور الذي يمر بالرأسين .

المحور المرافق : هو المحور العمودي على المحور القاطع و يمر بالمركز .

الصور القياسية لمعادلة القطع الزائد

المحور القاطع أفقي:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



المركز: (h,k)

الرأسان : $(h\pm a\,,k)$

البؤرتان : $(h\pm c\,,k)$

المحور القاطع $y=k$ ، طوله $2a$

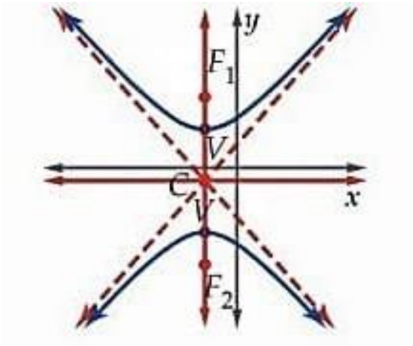
المحور المرافق $x=h$ ، طوله $2b$

خطا التقارب: $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$

العلاقة بين a،b،c $c=\sqrt{a^2+b^2}$

المحور القاطع رأسي:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$



المركز: (h,k)

الرأسان : $(h,k\pm a)$

البؤرتان : $(h\,,k\pm c)$

المحور القاطع $x=h$ ، طوله $2a$

المحور المرافق $y=k$ ، طوله $2b$

خطا التقارب: $y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$

العلاقة بين a،b،c: $c=\sqrt{a^2+b^2}$

تحديد أنواع القطوع المخروطية يمكنك تحديد نوع القطع المخروطي دون أن تكتب المعادلة: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ex+F=0$ على الصور القياسية، وذلك باستعمال المميز B^2-4AC

تصنيف القطوع المخروطية باستعمال المميز			
قطع مكافئ	قطع ناقص	دائرة	قطع زائد
$B^2-4AC=0$	$B^2-4AC<0$ $B\neq C\;,B\neq 0$	$B^2-4AC<0$ $B=0\;\;,A=C$	$B^2-4AC>0$

العلاقات والدوال

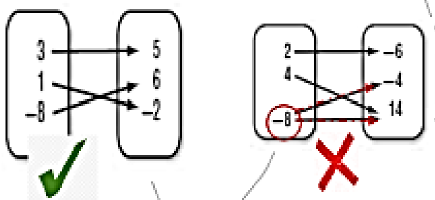
العلاقة ارتباط بين كميتين

الدالة علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى

متى تكون العلاقة دالة ؟؟

المخطط السهمي

كل عنصر في المجال ينطلق منه سهم واحد فقط



المعادلات

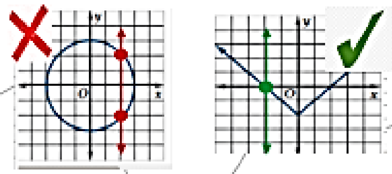
لكل قيمة في المدخل ينتج عنها قيمة واحدة فقط في المخرج

$y^3 = x - 9$ ✓

$y^2 = x - 9$ ✗

الرسم البياني

عن طريق اختبار الخط الرأسي



الأزواج المرتبة

عناصر المجال غير مكررة

✓ $\{(-6,-1),(-5,-9),(-3,-7),(1,7)\}$

✗ $\{(6,-1),(-5,-9),,(6,4)\}$

الجدول

عناصر المجال غير مكررة

✗

x	y
-3	4
1	-1
-3	0

✓

x	y
-3	4
1	-1
2	0

إيجاد قيمة الدالة $f(x)$ عند نقطة بالتعويض

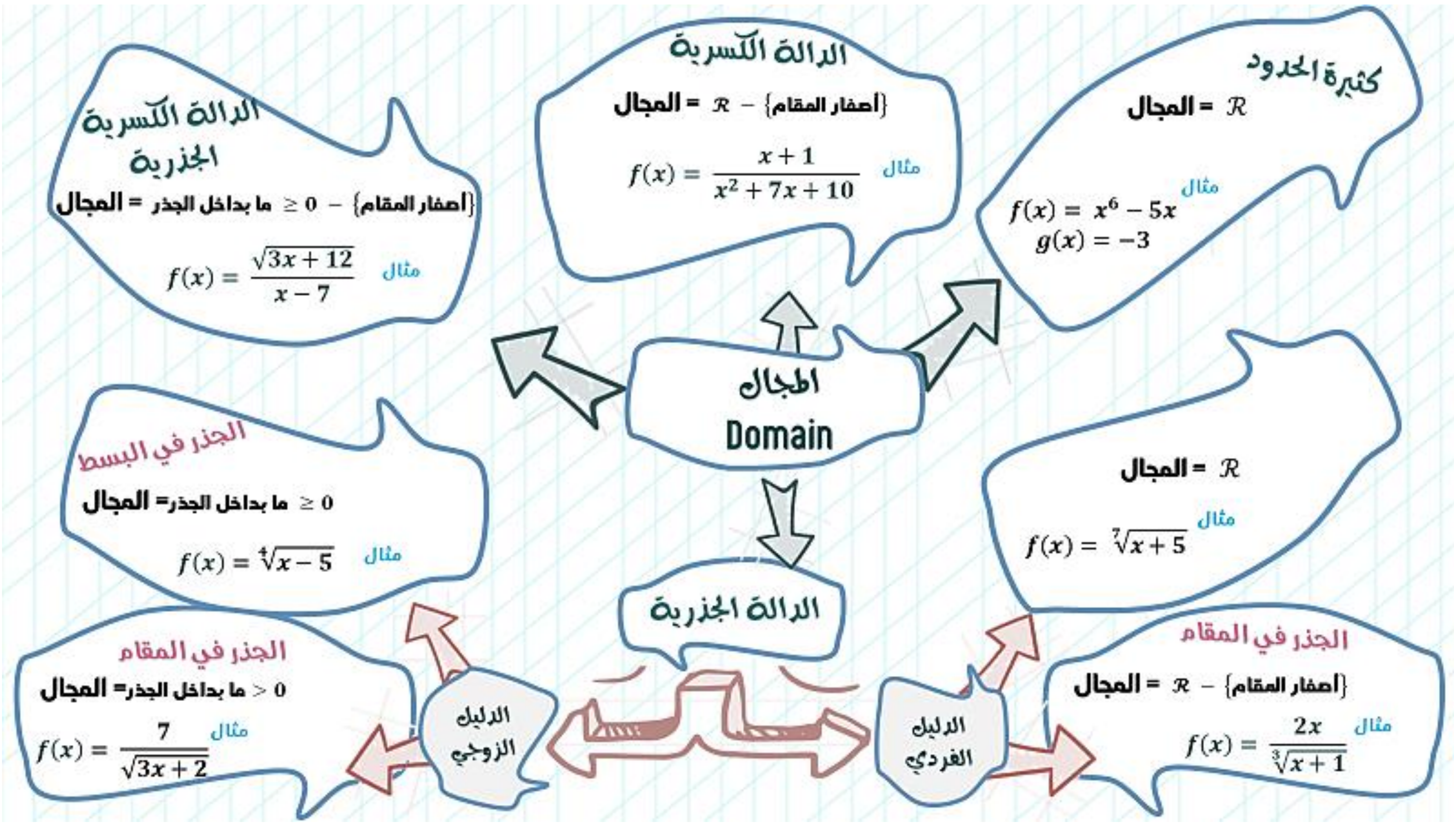
مثلاً : للدالة $f(x) = x^2 - 9$ فإن قيمة :

$$f(5) = 5^2 - 9 = 25 - 9 = 16$$

إضاءة للدالة متعددة التعريف يجب التعويض في الفترة التي تحقق السؤال .

إيجاد المجال جبرياً

المجال جميع القيم التي يمكن التعويض بها في الدالة بحيث تبقى قيمة الدالة معرفة



مثال أوجد مجال الدالة في كل مما يلي:

- مجال الدالة $f(x)=x^2-9$ هو **R**
- مجال الدالة $f(x)=\frac{3x-7}{x^2-4}$ هو:

أصفار المقام : $x^2-4=0$

$\Rightarrow x^2=4$

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$

المجال : $R-\{\pm 2\}$

- مجال الدالة $f(x)=\sqrt{2x-16}$ هو:

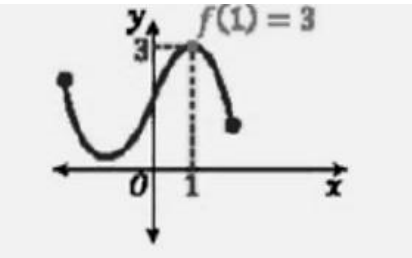
$2x-16\geq 0$

$\Rightarrow 2x\geq 16$

$\Rightarrow x\geq 8$

المجال : $[8,\infty)$

تحليل التمثيل البياني

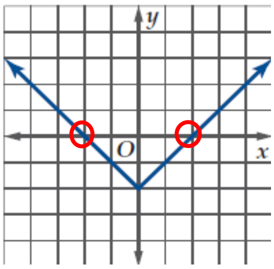


قيمة الدالة عند نقطة: طول العمود الواصل من نقطة على المحور x إلى منحنى الدالة

المجال: العناصر التي يصنعها المنحنى على محور x (الخط الأفقي للدالة)

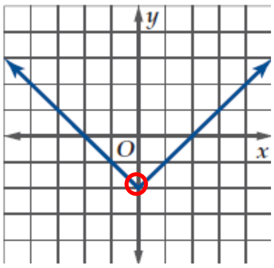
المدى: العناصر التي يصنعها المنحنى على محور y (الخط الرأسي للدالة)

الأصفار مقطع x
- **بيانياً** الإحداثي x لنقاط تقاطع الدالة مع محور x
- **جبرياً** قيم x تحت شرط $y = 0$



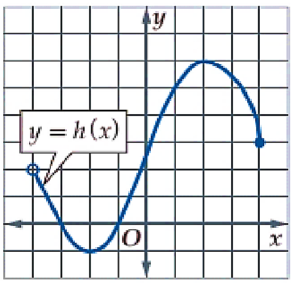
$x = 2, -2$

مقطع y
- **بيانياً** الإحداثي y لنقاط تقاطع الدالة مع محور y
- **جبرياً** قيم y تحت شرط $x = 0$



$y = -2$

مثال للدالة التالية



- المجال = $[-4,4]$
- المدى = $[-1,6]$
- مقطع x هو: $x = -3, -1$
- مقطع y هو: $y = 2$
- $f(-2) = -1$

للعودة إلى محتويات قسم الهندسة
اضغط هنا

تماثل العلاقات والدوال

التماثل

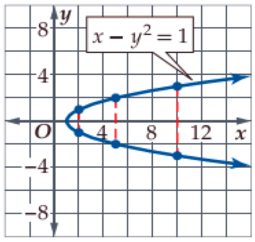
حول مستقيم

إذا تم طي الشكل باستخدام مستقيم وحصلنا على نصفين منطبقين تماماً

حول نقطة

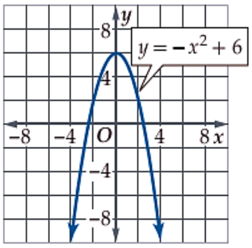
إذا تم تدوير الشكل بزاوية معينة وحصلنا على نفس الشكل المعطى

تماثل حول محور x



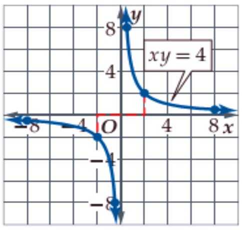
بالتعويض في $-y$ مكان y تعطي معادلة

تماثل حول محور y



بالتعويض في $-x$ مكان x تعطي معادلة

تماثل حول نقطة الأصل



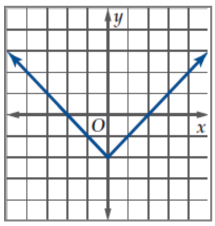
بالتعويض في $-x$ مكان x و $-y$ مكان y فتعطي معادلة مكافئة

إضاءة التماثل حول محور x يكون للعلاقات فقط

مثال

الدالة $f(x) = x^3 - 2x$ تعتبر دالة فردية لأن جميع أسس متغيراتها أسس فردية ، وبالتالي تكون متماثلة حول نقطة الأصل

الدالة



متماثلة حول محور y ، وبالتالي فهي دالة زوجية

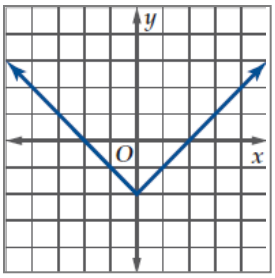
الدوال الزوجية والفردية

	بيانياً	جبرياً	بالنسبة لأسس متغيراتها
الدالة الزوجية	متماثلة حول محور y	$f(-x) = f(x)$	جميع الأسس أعداد زوجية
الدالة الفردية	متماثلة حول نقطة الأصل	$f(-x) = -f(x)$	جميع الأسس أعداد فردية

إضاءة: الحد الثابت يعتبر حد زوجي

مثال

الدالة $f(x) = x^3 - 2x$ تعتبر دالة فردية لأن جميع أسس متغيراتها أسس فردية ، وبالتالي تكون متماثلة حول نقطة الأصل



الدالة متماثلة حول محور y ، وبالتالي فهي دالة زوجية

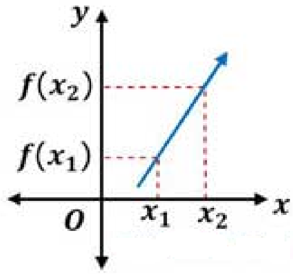
اطراد الدالة والقيم القصوى

حالات اطراد الدالة

متزايدة

كلما زادت قيم x تزداد قيم f(x)

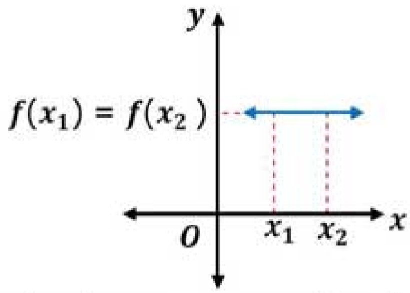
(كلما اتجهنا لليمين يرتفع المنحنى)



ثابتة

كلما زادت قيم x لا تتغير قيم f(x)

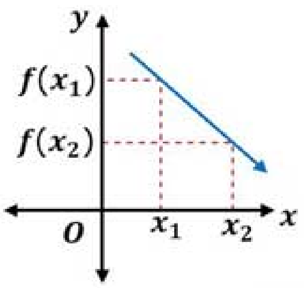
(كلما اتجهنا لليمين المنحنى لا يرتفع ولا ينخفض)



متناقصة

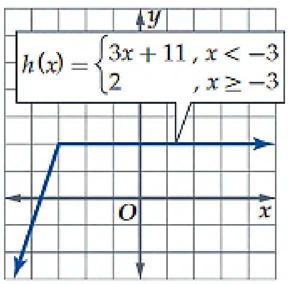
كلما زادت قيم x تنقص قيم f(x)

(كلما اتجهنا لليمين ينخفض المنحنى)

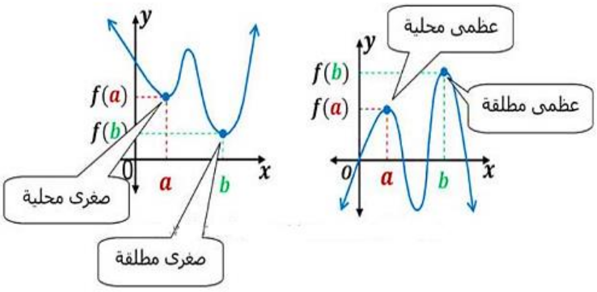


مثال في الفترة $(-\infty, -3)$ تكون الدالة متزايدة ،

اما في الفترة $(-3, \infty)$ تكون الدالة ثابتة



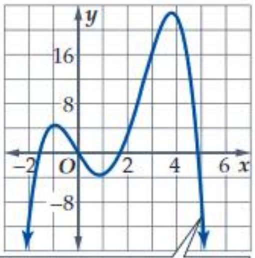
القيم العظمى والصغرى عندما يتغير سلوك الدالة للتناقص او العكس فإنه ينتج في منحنى الدالة قمة أو قاع



النقطة عند القمة أو القاع تسمى نقطة حرجة ،
اما قيمتها فتسمى قيمة قصوى

إضاءة درجة الدالة = عدد القمم + عدد القيعان +1

مثال للدالة في الشكل المجاور



- $(-1,4)$ عظمى محلية
- $(1,-2)$ صغرى محلية
- $(4,22)$ عظمى مطلقة
- لا يوجد قيم صغرى مطلقة

متوسط معدل التغير بين نقطتين هو ميل المستقيم المار بهما . ويعطى بالقانون $f(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ على الفترة $[a,b]$

إضاءة متوسط معدل التغير = السرعة المتوسطة

مثال متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = 5x$ على الفترة $[2,3]$ هو :

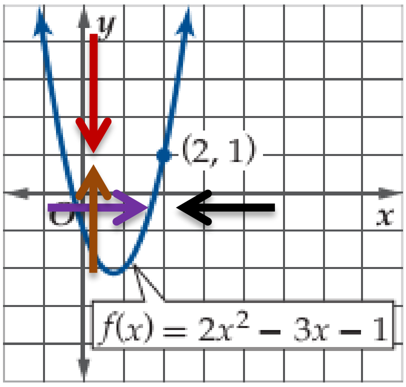
$$\frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{5(3)-5(2)}{1} = \frac{15-10}{1} = 5$$

للعودة إلى محتويات قسم الهندسة
اضغط هنا

النهاية

النهاية هو اقتراب قيم الدالة من قيمة محددة دون الوصول إلى تلك القيمة

نهاية الدالة عند العدد 2



لمنحنى الدالة $f(x)$ كلما اقتربنا من العدد 2 على محور x (من اليسار ومن اليمين)

نلاحظ أن قيمة الدالة تقترب من العدد 1 على محور y

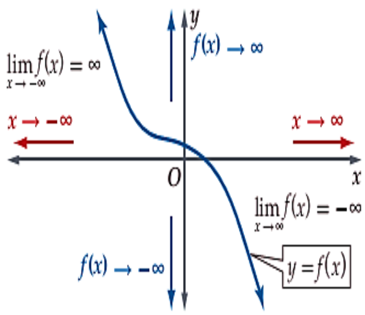
وعليه فإننا نقول : $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$

نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من 2 تساوي 1

إضاءة هناك طرفان للنهاية هما :

- $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من 2 من جهة اليمين تساوي 1
- $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من 2 من جهة اليسار تساوي 1

سلوك طرفي التمثيل البياني يصف سلوك طرفي التمثيل البياني سلوك الدالة عند طرفي منحناها ، أي أنه يصف قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x أو تنقص بلا حدود (عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$)



سلوك طرفي التمثيل البياني من اليسار

$lim_{x\to-\infty} f(x)$

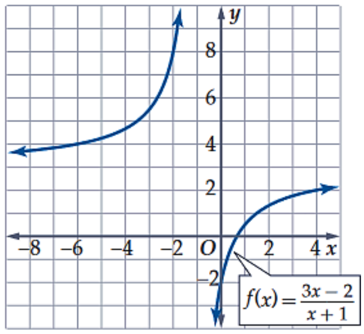
نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من سالب ما لانهاية

سلوك طرفي التمثيل البياني من اليمين

$lim_{x\to\infty} f(x)$

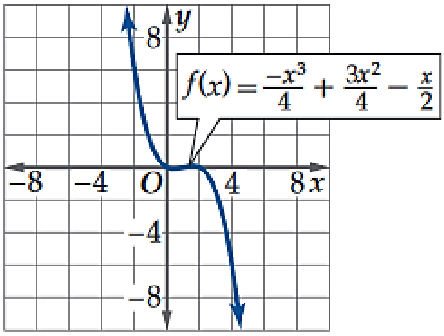
نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من موجب مالانهاية

مثال صف سلوك طرفي التمثيل البياني للتمثيلات التالية



$\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$



$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

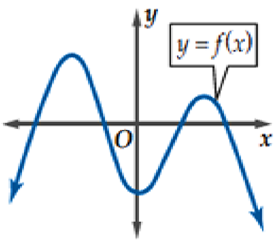
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

الاتصال

الاتصال

تكون الدالة متصلة إذا لم يكن في تمثيلها أي انقطاع أو قفزة

يمكننا رسم مسار منحنى الدالة دون أن نرفع القلم



$f(x)$ متصلة لجميع قيم x.

شروط اتصال دالة عند نقطة

يقال أن الدالة $f(x)$ متصلة عند النقطة c إذا حققت الشروط التالية :

- أن تكون قيمة $f(c)$ موجودة
- أن تكون $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة ($\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x)$)
- أن تكون $f(c) = \lim_{x\to c} f(x)$

أنواع عدم الاتصال

نقطي

قابل للإزالة

$$f(c) \neq \lim_{x \to c} f(x)$$

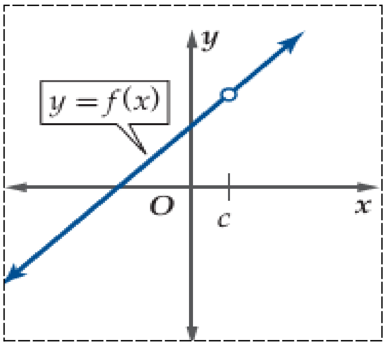
للدالة عدم اتصال نقطي عند x=c

إذا كانت الدالة متصلة عند كل نقطة

في مجالها باستثناء النقطة x=c ،

ويشار إليها بدائرة صغيرة (o)

مثال



قفزي

غير قابل للإزالة

$$\lim_{x \to c^+} f(x) \neq \lim_{x \to c^-} f(x)$$

للدالة عدم اتصال قفزي عند x=c

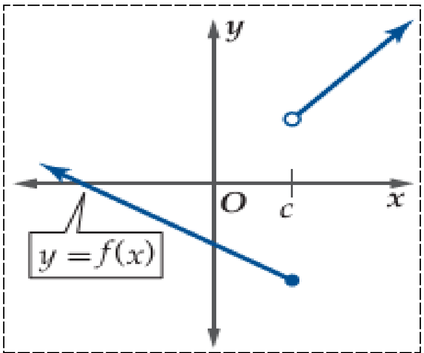
اذا كانت نهايتا الدالة عندما

تقترب xمن c من اليمين

ومن اليسار موجودتين

ولكنهما غير متساويتين

مثال



لا نهائي

غير قابل للإزالة

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$$

أو $\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$

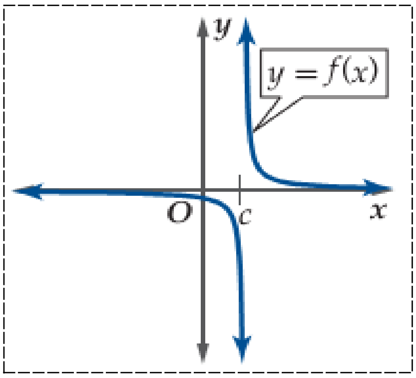
للدالة عدم اتصال لانهائي عند x=c

إذا تزايدت قيم الدالة

أو تناقصت بلا حدود عندما

تقترب x من c من اليمين أو اليسار

مثال



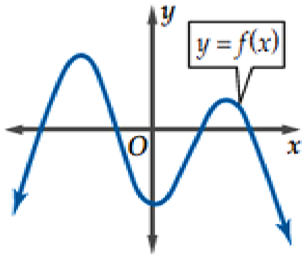
حالات اتصال دالة عند نقطة x=c

$f(c)$ موجودة

$\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة

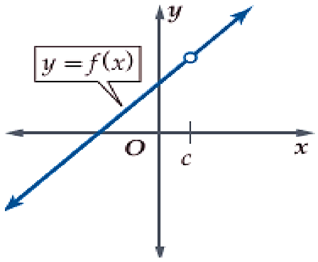
$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

$f(x)$ متصلة عند $x = c$



$\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$

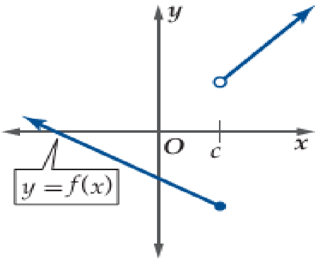
$f(x)$ لديها عدم اتصال نقطي عند $x = c$



$\lim_{x\to c} f(x)$ غير موجودة

$\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x)$

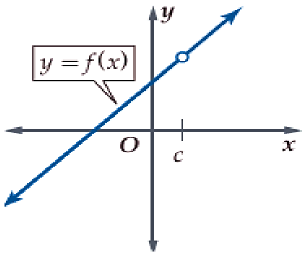
$f(x)$ لديها عدم اتصال قفزي عند $x = c$



$f(c)$ غير موجودة

$\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة

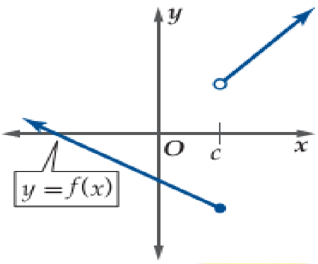
$f(x)$ لديها عدم اتصال نقطي عند $x = c$



$\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة

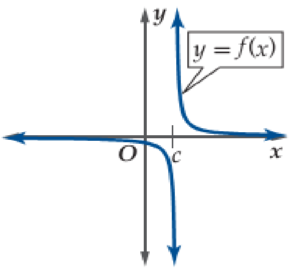
$\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x)$

$f(x)$ لديها عدم اتصال قفزي عند $x = c$



$\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$

$f(x)$ لديها عدم اتصال لانهائي عند $x = c$



نظرية القيمة

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وكانت $a < b$ ووجدت قيمة n بين $f(a)$ و $f(b)$

فإنه يوجد عدد c بين b و a بحيث : $f(c) = n$

مثال حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة التالية في الفترة المعطاة:

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 18x - 14 , \qquad [0, 4]$$

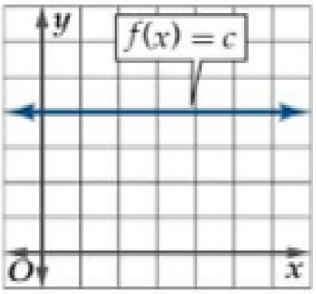
x	0	1	2	3	4
$f(x)$	−14	−2	2	4	10

تغيرت الإشارة

∴ يوجد صفر حقيقي للدالة $f(x)$ في الفترة (1 ، 2)

الدوال الرئيسة الأم

الدالة الثابتة $f(x) = c$



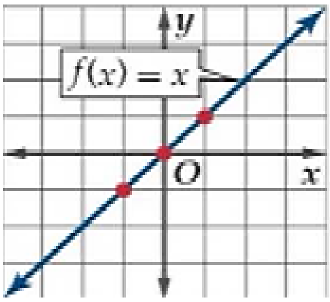
الصورة العامة للدالة :

$f(x) = c$

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية R

المدى: $\{c\}$

الدالة المحايدة $f(x) = x$



الصورة العامة للدالة :

$f(x) = x$

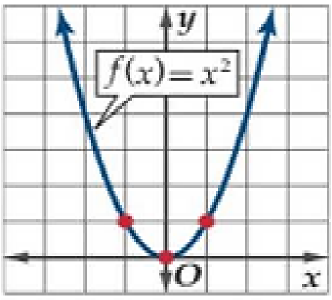
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية R

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية R

الدالة التربيعية $f(x) = x^2$

مجالها : مجموعة الأعداد الحقيقية R

مداها : $[0, \infty)$



الصورة العامة للدالة :

$f(x) = (x - h)^2 + k$

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية R

المدى: $[k, \infty)$

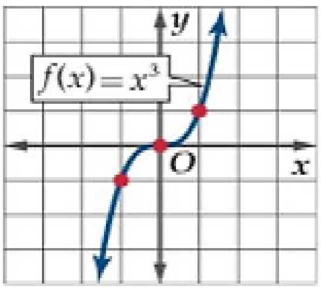
ملاحظة هامة:

في حالة الانعكاس للدالة فإن المدى = $(-\infty, k]$

الدالة التكعيبية $f(x) = x^3$

مجالها : مجموعة الأعداد الحقيقية R

مداها : مجموعة الأعداد الحقيقية R



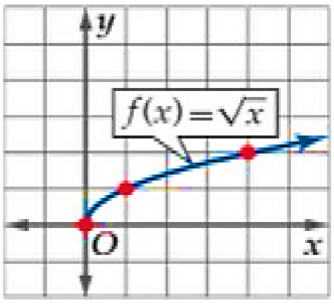
الصورة العامة للدالة :

$f(x) = (x - h)^3 + k$

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية R

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية R

دالة الجذر التربيعي $f(x) = \sqrt{x}$



مجالها : $[0, \infty)$

مداها : $[0, \infty)$

الصورة العامة للدالة :

$f(x) = \sqrt{x-h} + k$

المجال: $[h, \infty)$

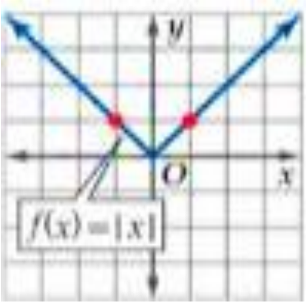
المدى: $[k, \infty)$

ملاحظة هامة:

في حالة الانعكاس للدالة فإن المدى = $(-\infty, k]$

دالة القيمة المطلقة $f(x) = |x|$

مجالها : مجموعة الأعداد الحقيقية R



مداها : $[0, \infty)$

الصورة العامة للدالة :

$f(x) = |x-h| + k$

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية R

المدى: $[k, \infty)$

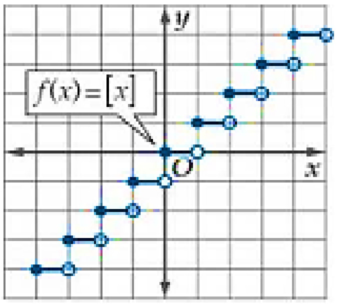
ملاحظة هامة:

$\sqrt{x^2} = |x|$

دالة أكبر عدد صحيح (الدالة الدرجية) $f(x) = [x]$

$[x]$ هو العدد الأقل من أو يساوي x

مثلاً $[2.9] = 2$ ،، $[-2.9] = -3$



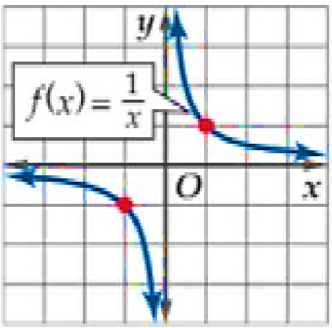
الدالة الدرجية

$f(x) = [x]$

المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية R

المدى: مجموعة الأعداد الصحيحة Z

دالة المقلوب $f(x) = \frac{1}{x}$



مجالها $R - \{0\}$

مداها : $R - \{0\}$

الصورة العامة للدالة :

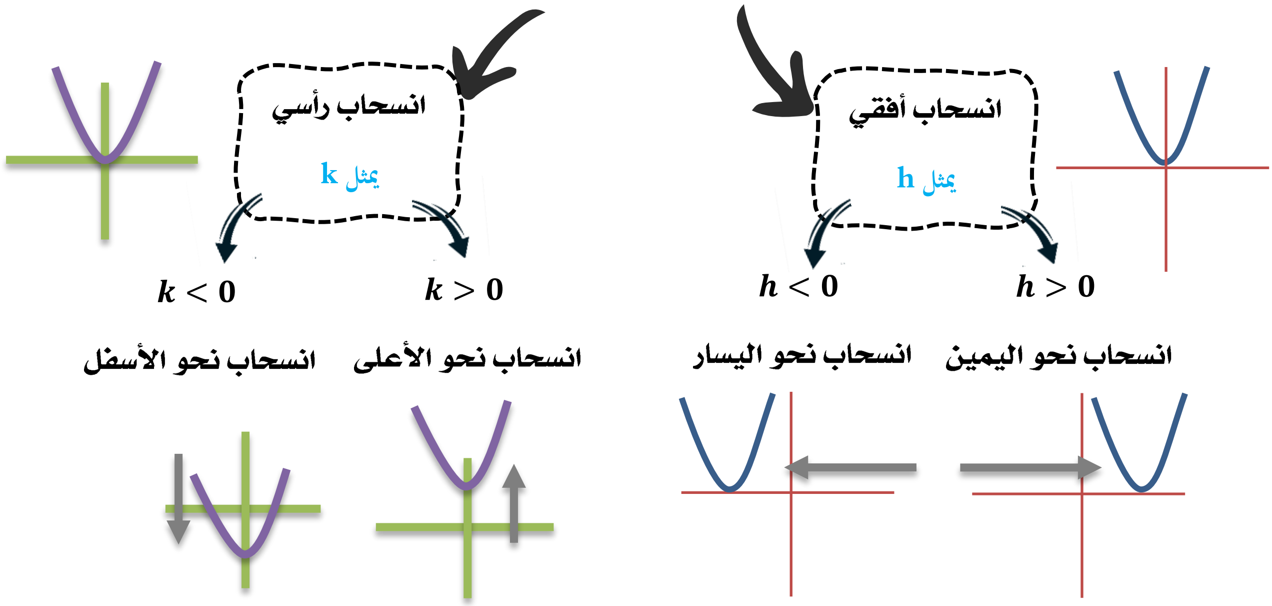
$f(x) = \frac{1}{x-h} + k$

المجال: $R - \{h\}$

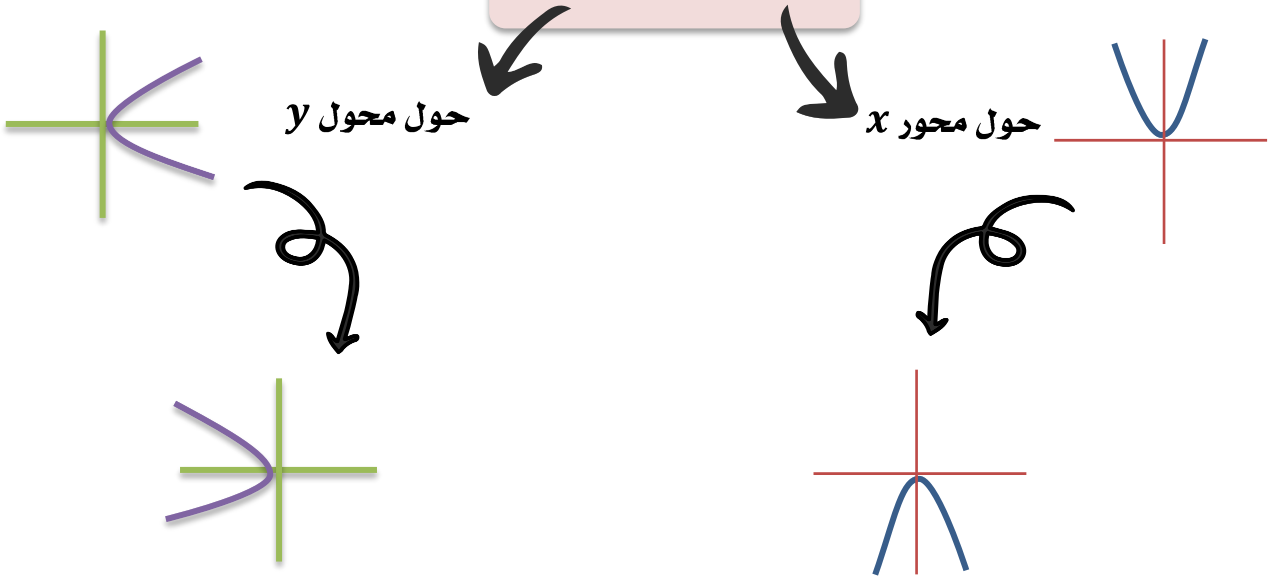
المدى: $R - \{k\}$

التحويلات الهندسية على الدوال الأم

الإزاحة (الانسحاب)



الإنعكاس حول المحورين



$g(x) = f(-x)$

$g(x) = -f(x)$

التمدد

تمدد رأسي

للدالة $g(x) = af(x)$

توسع رأسي
$a > 1$

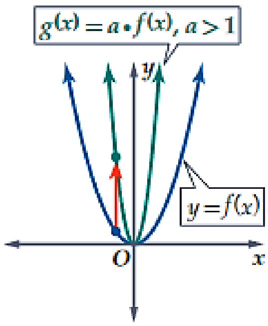
تضييق رأسي
$0 < a < 1$

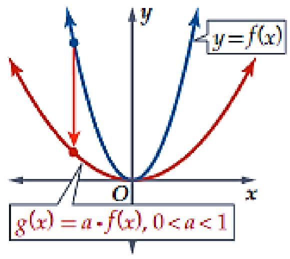
تمدد أفقي

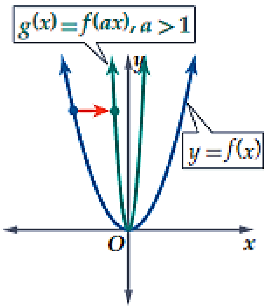
للدالة $g(x) = f(ax)$

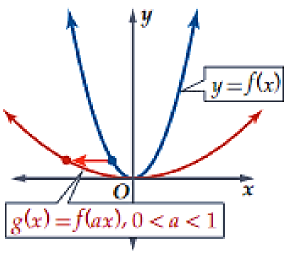
تضييق أفقي
$a > 1$

توسع أفقي
$0 < a < 1$



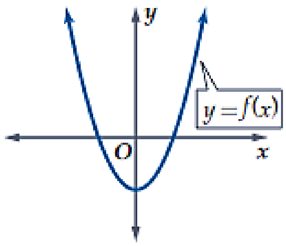


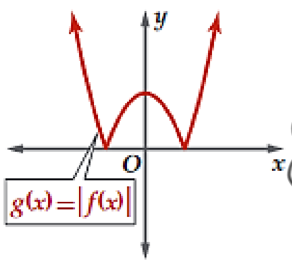




تحويلات القيمة المطلقة

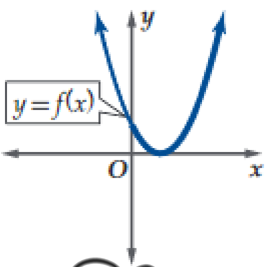
$$g(x) = |f(x)|$$

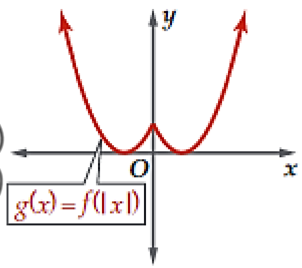




يُغير هذا التحويل الهندسي أي جزء من منحنى الدالة يقع تحت محور x ليصبح فوقه بالانعكاس حول محور x

$$g(x) = f(|x|)$$





يُغير هذا التحويل الهندسي جزء منحنى الدالة الموجود إلى يسار محور y ويضع مكانه صورة جزء المنحنى الواقع إلى يمين محور y بالانعكاس حول محور y

للعودة إلى محتويات قسم الهندسة
اضغط هنا

العمليات على الدوال

إذا كانت $f(x), g(x)$ دالتان لهما مجال مشترك فإن :

❖ $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

مجال $f+g$ = مجال f ∩ مجال g

❖ $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

مجال $f-g$ = مجال f ∩ مجال g

❖ $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

مجال $f \cdot g$ = مجال f ∩ مجال g

❖ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

مجال $\frac{f}{g}$ = مجال f ∩ مجال g - { أصفار المقام }

تركيب دالتين

تركيب دالتين للدالتين $f(x), g(x)$ فإن : $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

مثال

$f = \{(15,11),(0,13)\}$, $g = \{(8,15),(9,0)\}$ فإن: $f \circ g = \{(8,11),(9,13)\}$

$f(x) = 2x - 5$, $g(x) = 4x$ فإن : $(f \circ g)(x) = f(4x) = 2(4x) - 5 = 8x - 5$

مجال تركيب دالتين مجال $(f \circ g)$ = مجال الدالة الناتجة $f(g)$ ∩ مجال g

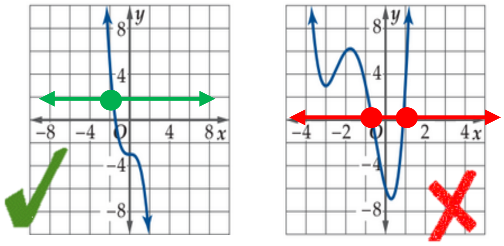
الدالة العكسية $f^{-1}(x)$

الدالة المتباينة دالة لا يرتبط فيها أكثر من عنصر في المجال بالعنصر نفسه في المدى

بيانياً

اختبار الخط الأفقي في الرسم البياني

لا يمر إلا على نقطة واحدة



عددياً

(الأزواج المرتبة ،، الجدول)

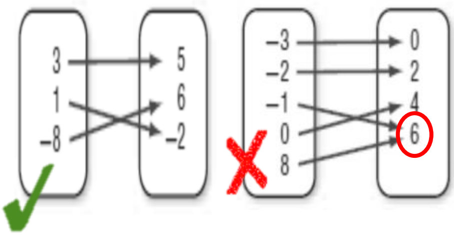
عناصر المدى لا تتكرر

x	y
-3	4
1	-1
2	0

x	y
0	5
-7	2
2	5

المخطط السهمي

يصل لكل عنصر في المدى سهم واحد فقط



إضاءة إذا كانت الدالة متباينة فإن لها دالة عكسية

خطوات إيجاد الدالة

- نضع y بدلاً عن $f(x)$
- التبديل بين x و y
- حل المعادلة بالنسبة لـ y
- نضع $f^{-1}(x)$ بدلاً عن y

مثال إذا كان $f(x) = 3x + 1$ فإن:

$$y = 3x + 1 \Rightarrow x = 3y + 1$$

$$\Rightarrow x - 1 = 3y$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{3}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$$

إضاءات

- مجال $f^{-1}(x)$ هو مدى $f(x)$ ، ومدى $f^{-1}(x)$ هو مجال $f(x)$
- معكوس $\frac{1}{x}$ هو نفسها

	بعض قواعد الاشتقاق		بعض قواعد التكامل
1	$\frac{dy}{dx}(x) = 1$		$\int 1\, dx = x + c$
2	$\frac{dy}{dx}(ax) = a$		$\int a\, dx = \boldsymbol{ax + c}$
3	$\frac{dy}{dx}(x^n) = n\, x^{n-1}$		$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$
4	$\frac{dy}{dx}\ (cosx) = -sinx$		$\int sinxdx = -\cos x + c$
5	$\frac{dy}{dx}\ (sinx) = cocx$		$\int cos\, xdx = \sin x + c$
6	$\frac{dy}{dx}\ (tanx) = sec^2 x$		$\int sec^2 x\, dx = \tan x + c$
7	$\frac{dy}{dx}\ (cotx) = -csc^2 x$		$\int csc^2 x\ \ dx = -\cot x + c$
8	$\frac{dy}{dx}\ (secx) = secx\ tanx$		$\int secx(\tan x)\, dx = \sec x + c$
9	$\frac{dy}{dx}\ (csc\ x) = -\csc x(\cot x)$		$\int \csc x(\cot x)\, dx = -\csc x + c$
10	$\frac{dy}{dx}\ (\ln x) = \frac{1}{x}$		$\int \frac{1}{x}\ dx = ln\|x\| + c$
11	$\frac{dy}{dx}\ (e^x) = e^x$		$\int e^x\, dx = e^x + c$
12	$\frac{dy}{dx}\ (a^x) = (\ln a)\,.\,a^x$		$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, a \neq 1, a > 0$
13	$\frac{dy}{dx}\ (sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = sin^{-1} x + c$
14	$\frac{dy}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	15	$\frac{dy}{dx}\ (\ln x) = \frac{1}{x}$
16	$\frac{dy}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \left[\frac{(\acute{f}).(g) - (f).(\acute{g})}{[g(x)^2]}\right]$	17	$\frac{dy}{dx}[f(x).g(x)] = (\acute{f}).(g) + (f).(\acute{g})$

	بعض قواعد النهايات		
1	$\lim_{x\to\propto}[c.f(x)] = c\lim_{x\to\propto} f(x)$	2	$\lim_{x\to\propto}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{n\to\infty} f(x) \pm \lim_{n\to\infty} g(x)$
3	$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{n\to\infty} f(x)}{\lim_{n\to\infty} g(x)}, g(x) \neq 0$	4	$\lim_{x\to\propto}[f(x).g(x)] = \lim_{n\to\infty} f(x).\lim_{n\to\infty} g(x)$
5	$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$	6	$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{n\to\infty} f(x)}{\lim_{n\to\infty} g(x)}, g(x) \neq 0$

	نهايتي الدالة الاسية و اللوغارثمية
1	$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty\ \ and\ \ \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
2	$\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty\ \ and\ \ \lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$

للعودة إلى محتويات قسم الهندسة
اضغط هنا

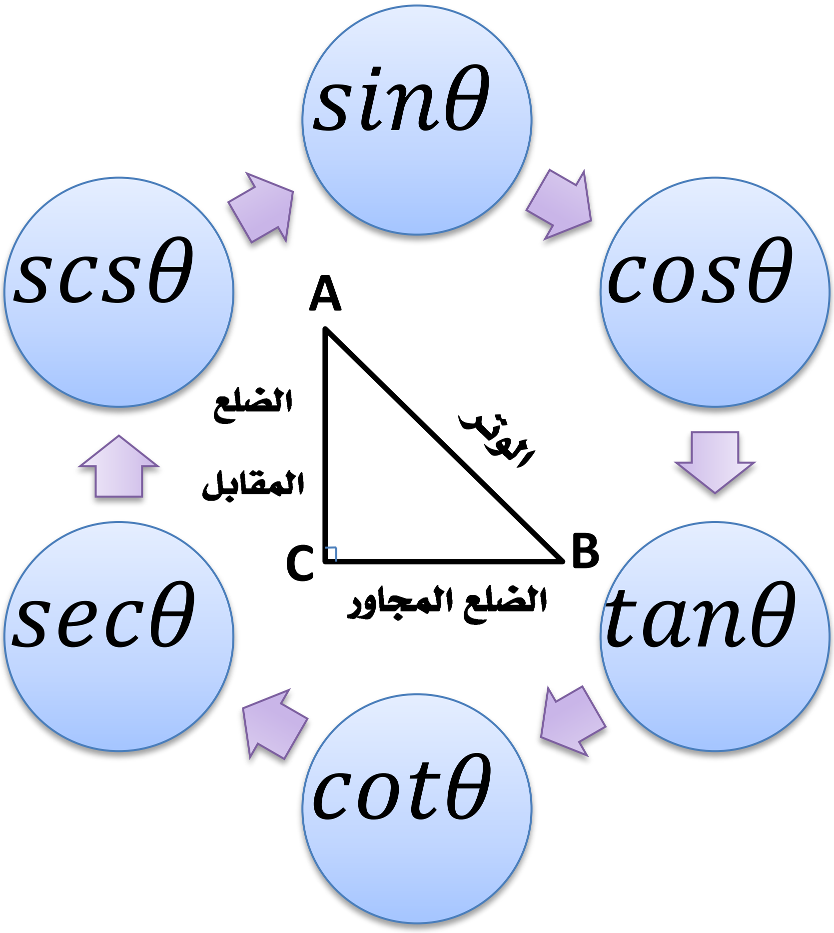
محتويات قسم حساب المثلثات

حساب المثلثات

حساب المثلثات	• يعرف بأنه علم يهتم بدراسة العلاقة بين زوايا وأضلاع المثلث القائم
النسبة المثلثية	• هي المقارنة بين طولي ضلعين في المثلث القائم الزاوية
الدالة المثلثية	• تعرف من خلال نسبة مثلثية

إذا كانت θ تمثل قياس زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية فإن

الدوال المثلثية الست تعرف بدلالة الوتر والضلع المقابل والضلع المجاور للزاوية.

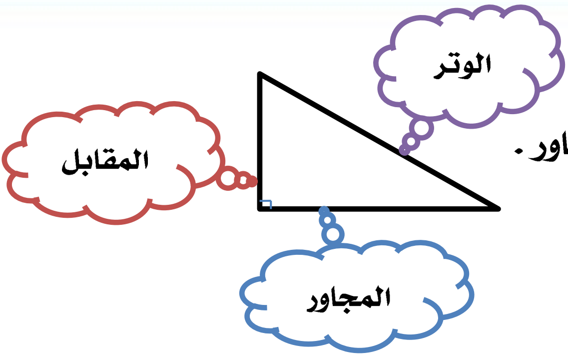


حساب المثلثات:

هو دراسة زوايا وأضلاع لمثلث قائم الزاوية

حساب المثلثات

اذا كانت θ زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية فإنه يوجد دوال مثلثية تعرف بدلالة الوتر ، الضلع المقابل ، الضلع المجاور .



مقلوبها		الدالة المثلثية	
قاطع تمام θ	$\csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$	جيب θ	$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$
قاطع θ	$\sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$	جيب تمام θ	$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$
ظل التمام θ	$\cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$	ظل θ	$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

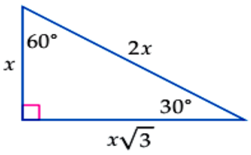
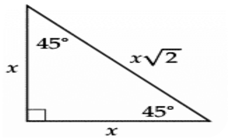
أي أن :

$$cot\theta = \frac{1}{tan\theta} \qquad ses\theta = \frac{1}{cos\theta} \qquad csc\theta = \frac{1}{sin\theta}$$

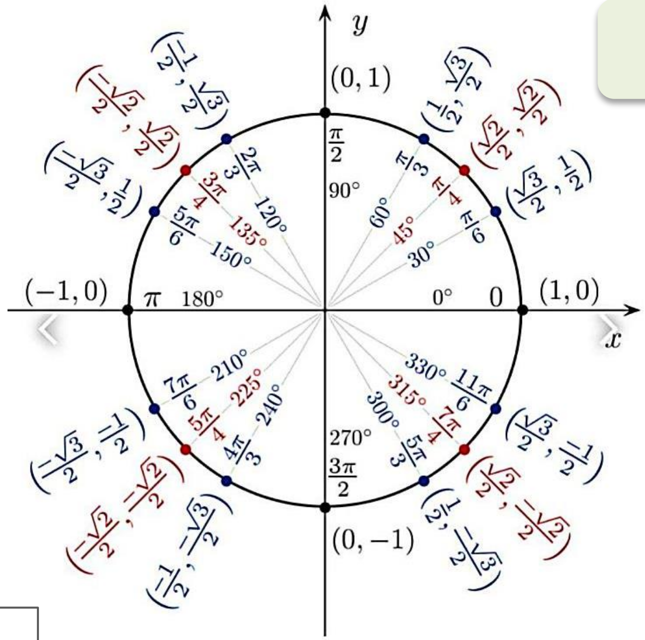
معكوس النسب المثلثية

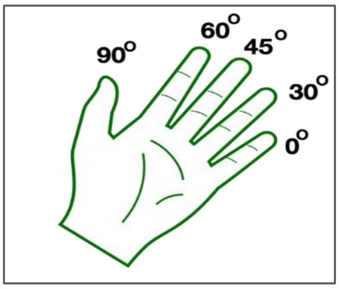
معكوس النسب المثلثية	
معكوسها	الدالة
$sin^{-1} = m\angle A$	$sinA = X$
$cos^{-1} = m\angle A$	$COSA = X$
$tan^{-1} = m\angle A$	$tanA = x$

بعض قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة:

الزاوية 60° و 30°		$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$
		$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$	$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$
الزاوية 45°		$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 45^\circ = 1$

بعض قيم الدوال المثلثية للزوايا :





يمكن إيجاد قيم الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة باستخدام أصابع اليد

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{\text{عدد الأصابع تحت الزاوية}}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{\text{عدد الأصابع فوق الزاوية}}}{2}$$

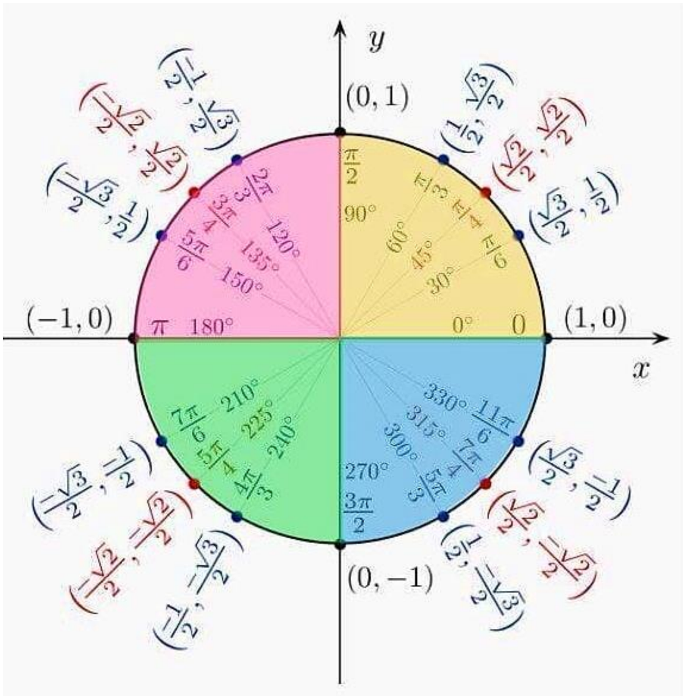
$$\tan\theta = \frac{\sqrt{\text{عدد الأصابع تحت الزاوية}}}{\sqrt{\text{عدد الأصابع فوق الزاوية}}}$$

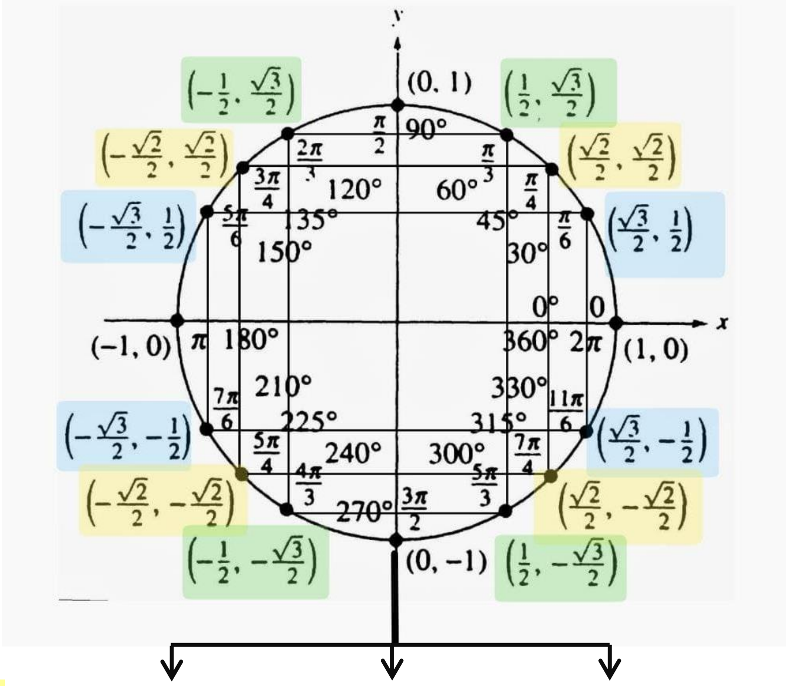
أمثلة

$$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1}} = \sqrt{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$$





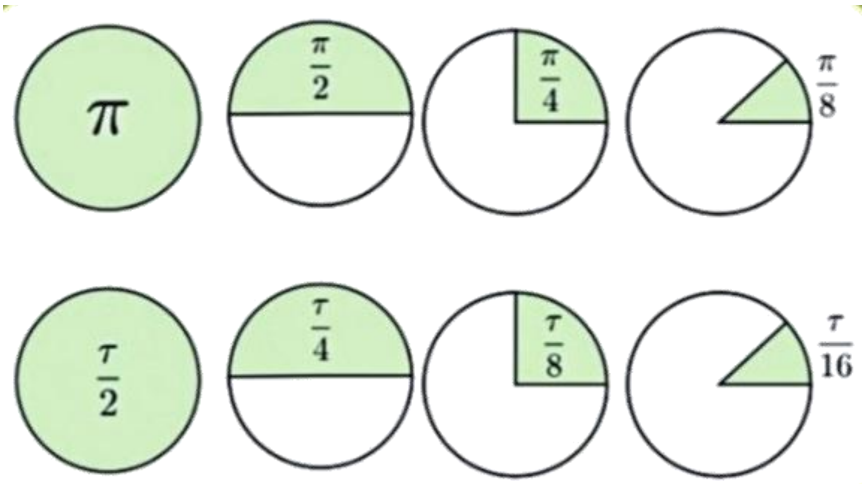
$sin = y$

$cos = x$

$tan = \frac{y}{x}$

$(x\ , y)$

الربع الأول: جميع النسب موجبة+
الربع الثاني: sin و $cosec$ موجبة+ والبقية سالبة
الربع الثالث: tan و cot موجبة+ والبقية سالبة
الربع الرابع: cos و sec موجبة+ والبقية سالبة



للعودة إلى محتويات قسم حساب المثلثات
اضغط هنا

حالات حل المثلث باستخدام قانون جيوب التمام

معرفة طولا ضلعين وقياس زاوية محصور بينهما
SAS

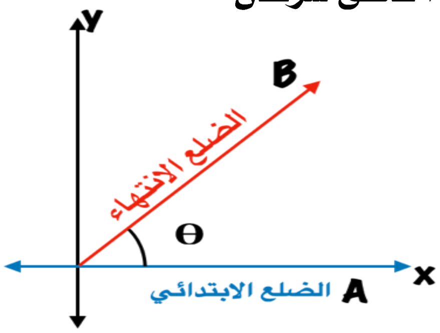
- نستخدم جيوب التمام لإيجاد الضلع الثالث
- ثم نستخدم قانون جيوب التمام لإيجاد إحدى الزاويتين
- ثم نستخدم قانون مجموع زوايا المثلث لإيجاد الزاوية الثالثة

معرفة أطوال ثلاثة أضلاع
SSS

- نحدد الزاوية الكبرى (المقابلة للضلع الأطول) ثم نستخدم قانون جيوب التمام لإيجادها
- ثم نستخدم قانون جيوب التمام لإيجاد الزاوية الصغرى و يمكن أيضا استخدام قانون الجيوب
- ثم نستخدم قانون مجموع زوايا المثلث لإيجاد الزاوية الثالثة

بعض قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة:

تكون الزاوية في الوضع القياسي في المستوى الإحداثي اذا تحقق شرطان

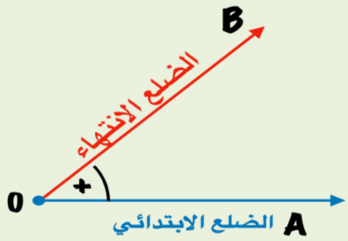
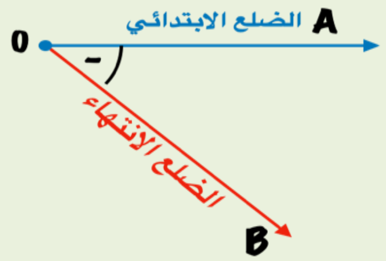


- ❖ رأسها نقطه الأصل
- ❖ احد ضلعيها منطبق على الجزء الموجب لمحور x

الضلع الابتدائي: هو الضلع المنطبق على المحور x

الضلع النهائي: هو الضلع الذي حول نقطه الأصل

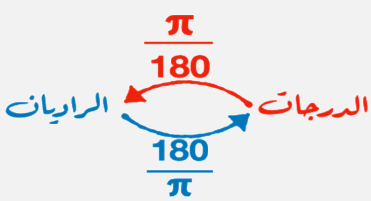
قياسات الزوايا

قياس زاوية موجب: عكس اتجاه حركه عقارب الساعة	قياس زاويه سالب: باتجاه حركه عقارب الساعة
	

قياس الزاوية بالراديان :

هو قياس زاويه في وضع قياسي،

طول قوسها مساوي لطول نصف قطرها



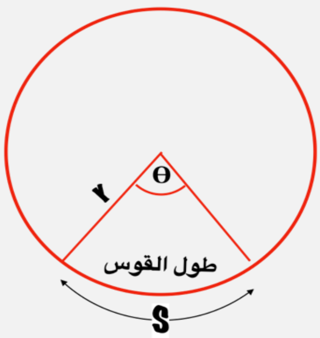
قياس الزاوية بالراديان :

$$S = r\,\theta$$

S : طول القوس

r : نصف قطر الدائرة

θ : الزاوية المركزية بالراديان

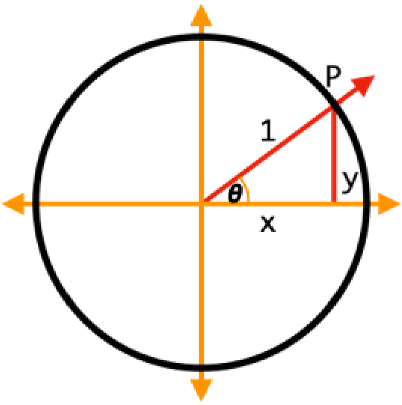


متطابقات مثلثية

المتطابقة: هي معادلة يتساوى طرفاها لجميع قيم المتغيرات فيها .

المتطابقات المثلثية : هي متطابقة تحوي دوال مثلثية .

متطابقات فيثاغورس في دائرة الوحدة:



$$X = cos\theta \ , \ y = sin\theta \ , \ tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow sin^2\theta + cos^2\theta = 1$$

$$tan^2\theta + 1 = sec^2\theta$$

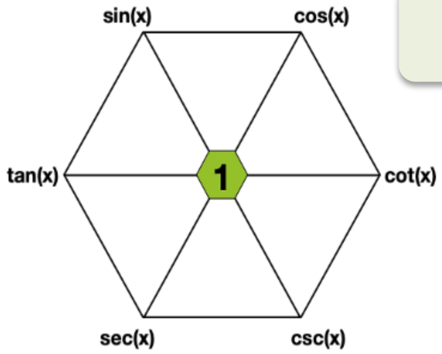
$$cot^2\theta + 1 = csc^2\theta$$

المتطابقات المثلثية الأساسية		
المتطابقات النسبية	$\tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta}$, $\cos\theta \neq 0$	$\cot\theta = \frac{cos\theta}{sin\theta}$, $\sin\theta \neq 0$
متطابقات المقلوب	$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$, $\csc\theta \neq 0$	$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$, $\sin\theta \neq 0$
	$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$, $\sec\theta \neq 0$	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, $\cos\theta \neq 0$
	$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$, $\cot\theta \neq 0$	$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$, $\tan\theta \neq 0$
متطابقات الزاويتين المتتامتين	$\text{Sin}(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$, $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$, $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta$	
متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية	$\text{Sin}(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\tan(-\theta) = -\tan\theta$	

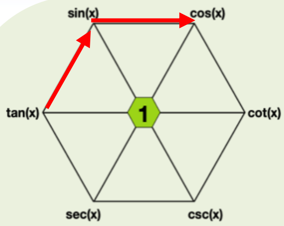
للعودة إلى محتويات قسم حساب المثلثات
اضغط هنا

حساب المثلثات

السداسي العجيب



متطابقات النسبية



$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\csc\theta}{\sec\theta}$$

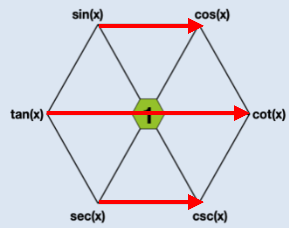
$$\sin\theta = \frac{\cos\theta}{\cot\theta} \qquad \csc\theta = \frac{\sec\theta}{\tan\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{\cot\theta}{\csc\theta} \qquad \sec\theta = \frac{\tan\theta}{\sin\theta}$$

بالدوران مع عقارب الساعة

كل داله مثلثيه = حاصل قسمة الدالة التأليه على الدالة التي بعدها وعكس دوران الساعة صحيح

متطابقات الزاويتين المتتامتين

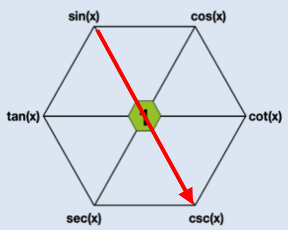


$$\cot(\tfrac{\pi}{2}-\theta) = \tan\theta \qquad \sin(\tfrac{\pi}{2}-\theta) = \cos\theta$$

$$\sec(\tfrac{\pi}{2}-\theta) = \csc\theta \qquad \cos(\tfrac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta$$

$$\csc(\tfrac{\pi}{2}-\theta) = \sec\theta \qquad \tan(\tfrac{\pi}{2}-\theta) = \cot\theta$$

متطابقات المقلوب



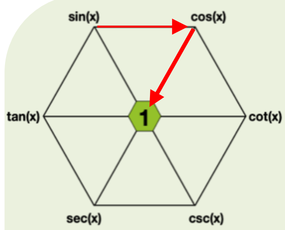
$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

كل داله هي مقلوب الدالة المقابلة لها

متطابقات فيثاغورس



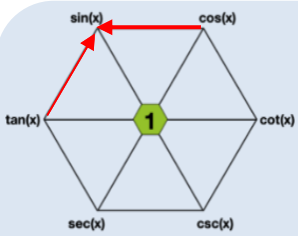
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

كل مثلث متطابقة

متطابقات حاصل ضرب دالتين متجاورتين



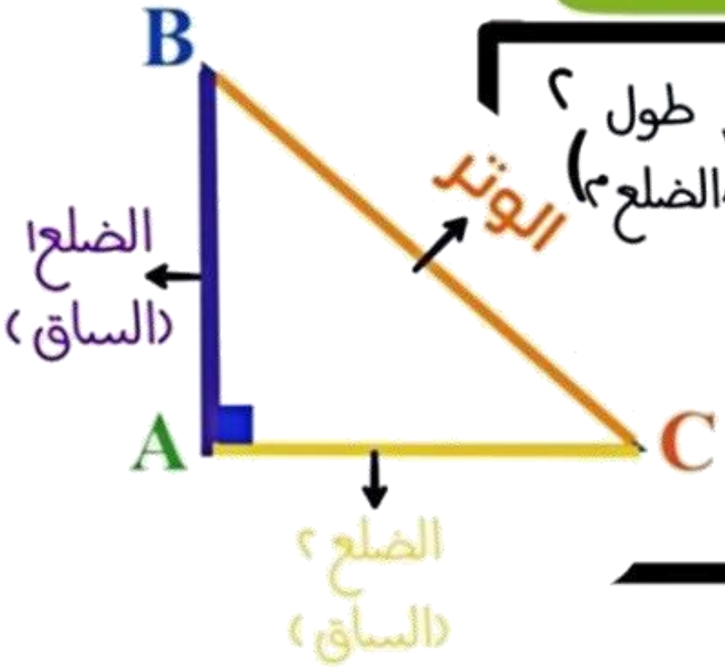
$$\sec\theta = \tan\theta \csc\theta \qquad \sin\theta = \tan\theta \cos\theta$$

$$\csc\theta = \sec\theta \cot\theta \qquad \cos\theta = \sin\theta \cot\theta$$

$$\cot\theta = \cos\theta \csc\theta \qquad \tan\theta = \sec\theta \sin\theta$$

كل داله هي عباره عن حاصل ضرب الدالتين المجاورتين لها

نظرية فيثاغورس



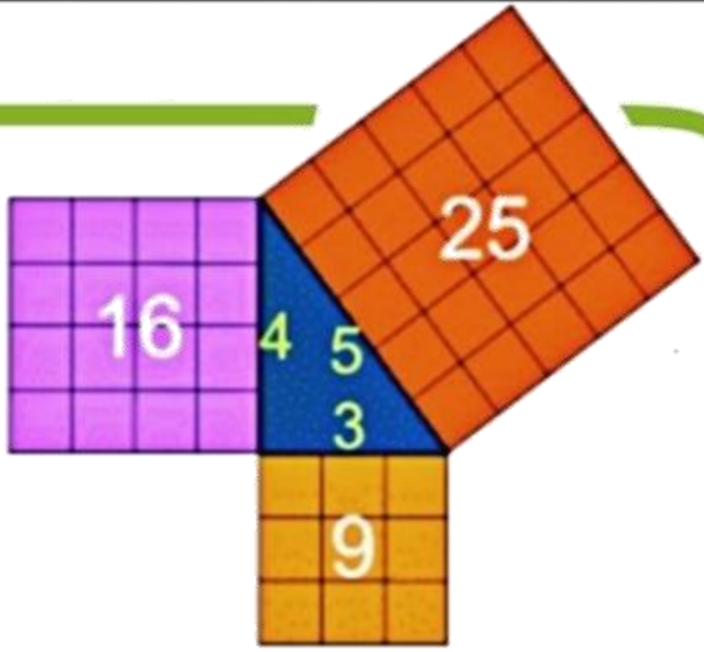
(طول الوتر)^٢ = (طول الضلع١)^٢ + (طول الضلع٢)^٢

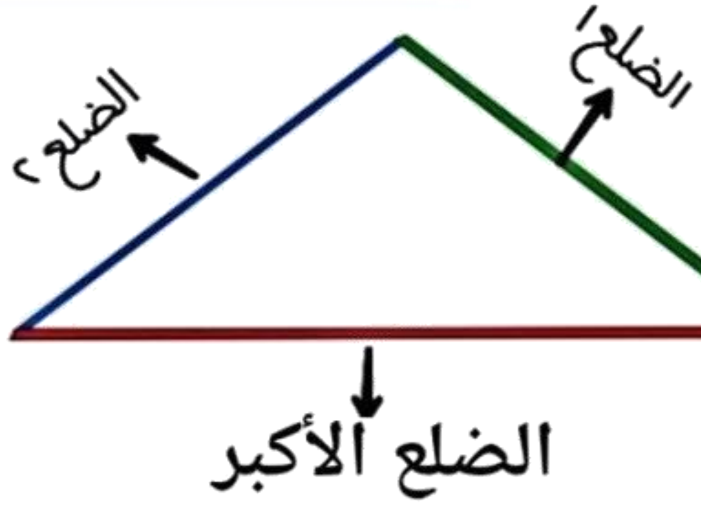
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

#. مثال

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

$$25 = 9 + 16$$





عكس نظرية فيثاغورس

اذا كان (طول الضلع الأكبر)^{٢} = (الضلع ١)^{٢} + (الضلع ٢)^{٢}

فإن المثلث هو مثلث قائم الزاوية

مثال : مثلث اطوال اضلاعه 5 - 4 - 3
فهل المثلث قائم الزاوية؟

الضلع الأكبر = أكبر عدد 5

$5^2 = 4^2 + 3^2$

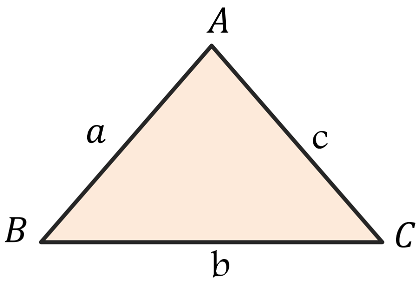
من نظرية فيثاغورس ⟶ $25 = 16 + 9$ ←

$25 = 25.$ ←

✅ اذا المثلث قائم الزاوية

مساحة المثلث

مساحه المثلث (k) تساوي نصف حاصل ضرب طولي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما



❖ القانون

$$k = \frac{1}{2} bc \sin A \text{ ، } k = \frac{1}{2} ac \sin B \text{ ، } k = \frac{1}{2} ab \sin C$$

قانون الجيوب (sines)

اذا كانت اضلاع ΔABC التي اطوالها : c، b ، a تقابل الزوايا ذات القياسات A،B،C على الترتيب فان :

❖ القانون

$$\frac{sinA}{a} = \frac{sinB}{b} = \frac{sinC}{c}$$

قانون جيوب التمام (cosines)

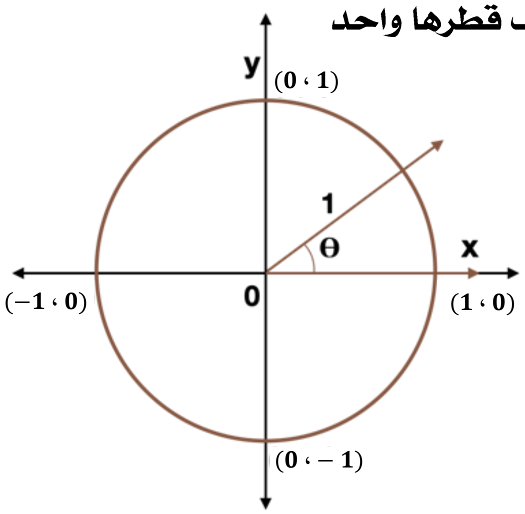
اذا كانت اضلاع ΔABC التي اطوالها : c ، b ، a تقابل الزوايا ذات القياسات A،B،C على الترتيب فان :

❖ القانون

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cosA$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cosA$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cosA$$

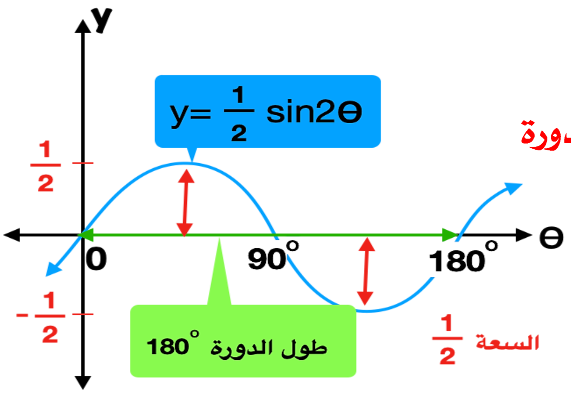
دائرة الوحدة

هي دائرة مرسومه في المستوى الإحداثي مركزها نقطه الأصل ونصف قطرها واحد



الدوال الدورية

شكلها عباره عن موجات منتظمة على شكل نمط محدد ،
يسمى النمط الواحد **دورة** ، والمسافة الأفقية تسمى **طول الدورة**



طول الدورة والسعة للدوال المثلثية

الدالة	sinθ	cosθ	tanθ
طول دورتها	360°	360°	180°
سعتها	1	1	غير معرفة

تعميم لطول الدورة والسعة للدوال المثلثية

الدالة	asinbθ	acosbθ	atanbθ
طول دورتها	$\frac{360°}{\|b\|}$	$\frac{360°}{\|b\|}$	$\frac{180°}{\|b\|}$
سعتها	1	1	غير معرفة

الدوال المثلثية الأساسية

الدالة	المجال	المدى	طول الدورة
sinθ	R	$[-1, 1]$	2π
cosθ	R	$[-1, 1]$	2π
tanθ	$R - \{90 \pm 180n\} \; n \in Z$	R	π

الدوال المثلثية العكسية

المدى	المجال	الدالة العكسية
$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$[-1, 1]$	$y = sin^{-1}\theta$ $Y = Arc\ sin\theta$
$[0, 180]$	$[-1, 1]$	$y = \cos^{-1}\theta$ $Y = Arc\ cos\theta$
$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$R - \{90 \pm 180\}\},n \in 180$	$y = \tan^{-1}\theta$ $Y = Arc\ tan\theta$

تمثيل دالتا الجيب وجيب التمام

❖ الصورة العامة لدالتي الجيب وجيب التمام

$Y = a\sin b\theta$ ، $Y = a\cos b\theta$

❖ خطوات الرسم :

1) نوجد السعة $|a|$
2) نوجد طول الدورة $\frac{360°}{|b|}$
3) نوجد نقاط التقاطع مع المحورθ

$Y = a\cos b\theta$
$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right), \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right)$
$y = a\sin b\theta$
$(0,0)\ , \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right), \left(\frac{360°}{b}, 0\right)$

للعودة إلى محتويات قسم حساب المثلثات
اضغط هنا

محتويات قسم الإحصاء

التحليل الإحصائي	**المفردات** • مقاييس النزعة المركزية (المتوسط الحسابي - الوسيط – المنوال) • مقاييس التشتت (المدى – المدى الربيعي – الربيعيات - الانحراف المعياري – التباين)
الدراسة المسحية	**المفردات** • أساليب جمع البيانات (الدراسة المسحية - الدراسة بالملاحظة – الدراسة التجريبية) • طرق اختيار العينة (متحيزة – غير متحيزة)
أنواع التمثيلات البيانية	**المفردات** • التمثيل بالأعمدة - المدرج التكراري – القطاعات الدائرية - التمثيل بالخطوط شكل الانتشار - التمثيل بالنقاط – التمثيل بالصندوق و طرفيه – التمثيل بالساق و الورقة

التحليل الإحصائي

مقاييس النزعة المركزية

يقصد بها: نزعة القيم نحو قيمة رقمية تمثلهم وأشهر مقاييسها:

المتوسط الحسابي

يساوي مجموع البيانات مقسوما على عددها ، ويرمز له : $\overline{x}$

وهو أكثر فائدة عندما (يفضل استخدامه)

عند عدم وجود قيمة متطرفة في البيانات

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

المتوسط الحسابي للبيانات :

2 , 2 , 3 , 4 , 14 : هو

$$\frac{2+2+3+4+14}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

الوسيط

خطوات إيجاد الوسيط

1- ترتيب البيانات أما تصاعدياً أو تنازلياً

2- إذا كان عدد البيانات فردي فترتيب الوسيط هو $\frac{n+1}{2}$

3- إذا كان عدد البيانات زوجي فترتيب الوسيط هو الوسط الحسابي للعددين الموجودين في وسط البيانات، أي نجمعهما ونقسمهما على 2

وهو أكثر فائدة عندما (يفضل استخدامه)

- إذا وجدت قيم متطرفة في البيانات
- ولا توجد فجوات كبيرة في منتصف البينات

الوسيط بعد الترتيب للبيانات:

9، 13، 11، 6 ، 10 هو: 10

و البيانات:

9، 13، 11، 6 ، 10 هو: 9,5

المنوال

وهو العدد أو الأعداد الأكثر تكرارا في مجموعة البيانات

أكثر فائدة عندما (يفضل استخدامه

عند وجود قيم متكررة في البينات

المنوال للبيانات :

50, 45, 45, 52, 49, 56, 56

45و 56هو:

أما البيانات :

13, 15, 9,10

لا يوجد منوال

التحليل الإحصائي

مقاييس التشتت: يقصد بها: مقدار انحراف القيم أي مدى انتشار البيانات عن مركزها (وسطها)

المدى: وهو الفرق بين أكبر وأصغر قيمة في مجموعة البيانات
- لوصف الأعداد التي تشملها مجموعة البيانات

المدى الربيعي: مدى النصف الأوسط من مجموعة البيانات وهو الفرق بين الربيعين الأعلى والأدنى
- لتحديد القيم الواقعة في النصف الأوسط من مجموعة البيانات

الربيعيات: وهو الفرق بين أكبر وأصغر قيمة في مجموعة البيانات
- لوصف الأعداد التي تشملها مجموعة البيانات

الانحراف المعياري: هو القيمة التي تحسب لتدل على مدى تباعد قيم مجموعة البيانات عن متوسطها الحسابي

التباين: هو مربع الانحراف المعياري

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2}{n-1}}$$ عدد قيم العينة n

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mu)^2}{n}}$$ عدد قيم المجتمع n

التحليل الإحصائي

مثال
مقاييس التشتت

في البيانات التالية: 36،8،18،9،8

$$36\ ,\ 18\ ,\ \boxed{9}\ ,\ 8\ ,\ 8$$

النصف الأعلى — الوسيط — النصف الأدنى

- المدى = 36 − 8 = 28
- الوسيط بعد الترتيب = 9
- الربيع الأدنى أي وسيط النص الأدنى من البيانات = 8
- الربيع الأعلى أي وسيط النص الأعلى من البيانات = 27
- المدى الربيعي = 27 − 8 = 15
- الانحراف المعياري: **هو الجذر التربيعي للتباين**

|36-9| + |8-9| + |18-9| + |9-9| +| 8-9| = 27+1+9+0+1=38

$$\sigma = \sqrt{\frac{38}{5}} = \sqrt{\frac{19}{2}}$$

- التباين: **هو مربع الانحراف المعياري**

$$\sigma^2 = \frac{19}{2}$$

الدراسة المسحية

أساليب جمع البيانات

الدراسة المسحية

تؤخذ البيانات من استجابات أفراد عينة من المجتمع

للتوصل إلى استنتاجات عامة حول المجتمع

مثال:

لتحديد درجة رضا طلاب مدرسة عن فقرات الإذاعة المدرسية الصباحية

يسأل مشرف الإذاعة عينة من ٥٠ طالب عن رأيهم في فقرات الإذاعة

الدراسة بالملاحظة

تسجيل البيانات بعد ملاحظة أو مشاهدة العينة

لمقارنة ردود الأفعال والتوصل إلى استنتاجات حول استجابات المجتمع

مثال:

تراقب شركة لصناعة الدمى بعض الأطفال وهم يلعبون وتلاحظ نوع الدمى التي يفضلونها أكثر ويستنتجون من ذلك أن الأطفال في عمر السنتين يفضلون الدمى التي تصدر أصواتا على تلك التي لا تصدر أصواتا

دراسة تجريبية

تسجل البيانات بعد تغيير العينة (مجموعة تجريبية: تخضع للمعالجة وأخرى ضابطة)

للتوصل إلى استنتاجات عامة حول ما يمكن أن يحدث خلال حادثة ما

مثال:

قامت مؤسسة للبحوث العلمية بتحليل ردود أفعال مجموعتين من الفئران تجاه السكر

الدراسة المسحية

طرق اختيار العينة

متحيزة

هي العينة التي يتم اختيارها بحيث تعطي تفضيلاً لمجموعة معينة على مجموعة أخرى

وتسمى : عينة غير عشوائية

غير متحيزة

هي العينة التي يتم اختيارها دون تفضيل مجموعة على أخرى ويكون لكل فرد منها الاحتمال نفسه في الاختيار

وتسمى : عينة عشوائية

البسيطة

العينة التي لها فرصة الاختيار نفسها كأي عينة من المجتمع

مثال:

سحب أرقام ١٠٠ طالب من صندوق وإخضاع هؤلاء لدراسة مسحية

الطبقية

يقسم المجتمع إلى فئات متماثلة غير متداخلة ثم يتم اختيار عينة من كل واحدة من هذه الفئات

مثال:

في ندوة تعريفية لمستشفى يتم اختيار طبيب من كل قسم عشوائيا ليقدم نبذه عن الخدمات التي يقدمها المستفى

المنتظمة

العينة التي يتم اختيار أفرادها تبعا لفترة زمنية محددة أو فئة محددة من العناصر

مثال:

يفحص المدير في أحد المطاعم جودة الفطائر كل ٢٠ دقيقة بدءا بوقت يحدده عشوائيا

للعودة إلى محتويات قسم الإحصاء
اضغط هنا

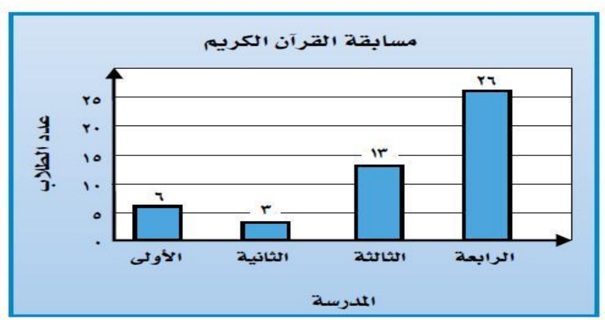
التمثيلات البيانية في الإحصاء

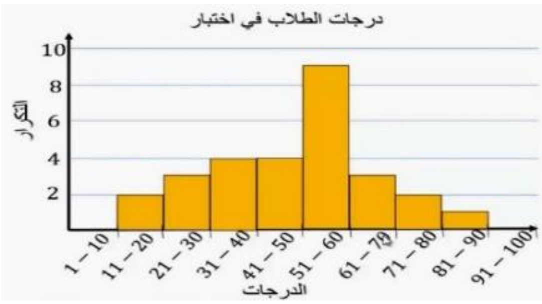
الرسم البياني

هو طريقة لتوضيح نتائج الدراسة الإحصائية بيانيا

وهناك العديد من أنواع الرسوم البيانية المختلفة و سنذكر هنا الأكثر

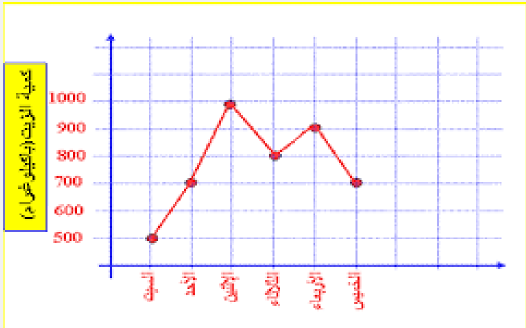
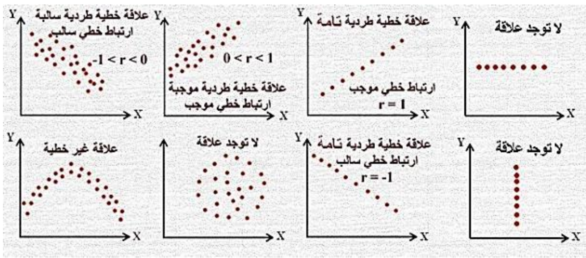
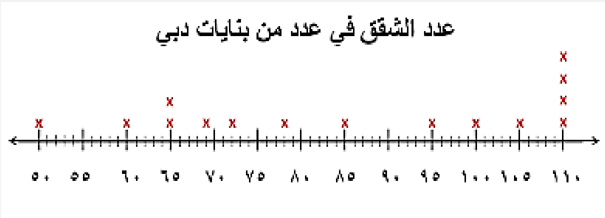
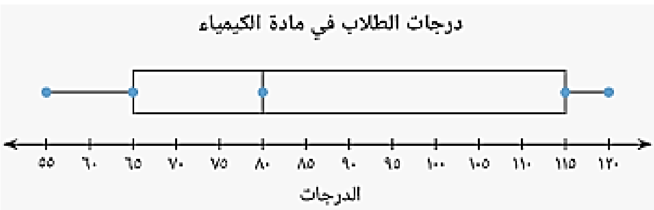
أنواع التمثيلات البيانية

<table>
<tr><th>نوع التمثيل</th><th>فيم يستعمل</th><th>رسم توضيحي</th></tr>
<tr><td>التمثيل بالأعمدة</td><td>طريقة للمقارنة بين البيانات باستعمال الأعمدة وأطوالها</td><td>
</td></tr>
<tr><td>المدرج التكراري</td><td>نوع خاص من الأعمدة البيانية

تستعمل فيه الأعمدة لتمثيل تكرارات البيانات العددية المنظمة في فئات</td><td>
</td></tr>
<tr><td>القطاعات الدائرية</td><td>يعرض البيانات على هيئة أجزاء من الكل في الدائرة ومجموع نسبها 100 ٪

تستعمل لمقارنة أجزاء من البيانات بمجموعة البيانات كلها</td><td>
</td></tr>
</table>

أنواع التمثيلات البيانية

نوع التمثيل	فيم يستعمل	رسم توضيحي
التمثيل بالخطوط	التمثيل بالخطوط يفيد في التنبؤ بأحداث مستقبلية لأنه يبين العلاقات أو التغيرات عبر الزمن	
شكل الانتشار	مفيد كالتمثيل بالخدود في إجراء التنبؤات لأنه يبين اتجاهات البيانات	
التمثيل بالنقاط	يستعمل لتوضيح كيفية انتشار البيانات	
التمثيل بالصندوق وطرفيه	يستعمل ليبين انتشار مجموعة من البيانات يرسم الصندوق حول قيم الربيعين ويمتد من الطرفين خطان مستقيمان يصلان بين الربيعين	
التمثيل بالساق والورقة	ترتب البيانات العددية ترتيبا تصاعديا أو تنازليا حيث تشكل الأعداد في المنزلة الكبرى السيقان و الأعداد في المنزلة التي تليها الأوراق	كمية البروتين (جم) منتجات الألبان | الساق | البذور، المكسرات، البقوليات ٩ ٨ ٨ ٧ ٧ ٦ ٢ ٢ | ٠ | ٥ ٦ ٩ ٠ | ١ | ٤ ٥ ٨ ٦ | ٢ | | ٣ | ٩ ٢|٦ = ٢٦ جراما ٩|٣ = ٣٩ جراما

للعودة إلى محتويات قسم الإحصاء
اضغط هنا

محتويات قسم التركيبات

طرق العد	**المفردات** • مبدأ العد (مبدأ الجمع - مبدأ الضرب – مبدأ التقابل) • التوافيق و التباديل
الحوادث و الاحتمالات	**المفردات** • التجربة العشوائية – فضاء العينة – طرق تمثيل فضاء العينة (المجموعات – الرسم الشجري - الشبكة – الجدول – القائمة المنظمة) • الحادثة – أنواع الحوادث (بسيطة – مركبة – مستحيلة – مؤكدة) • حساب احتمال وقوع الحادثة - مسلمات أساسية للاحتمال.
الاحتمال الهندسي	**المفردات** الأطوال - القطاعات الدائرية - المساحات
التوزيعات الاحتمالية	**المفردات** • أنواع التوزيع الاحتمالي – شروط التوزيع الاحتمالي – القيمة المتوقعة • التوزيع الطبيعي (خصائص منحنى التوزيع الطبيعي – حساب احتمال التوزيع الطبيعي) • توزيعات ذات الحدين (شروط تجربة ذات الحدين – حساب احتمال توزيع ذات الحدين)

التركيبات

طرق العد

باستعمال مبدأ العد		
أنواعه	**تعريفه**	**مثال**
مبدأ الجمع	إذا كان عدد طرق فعل شيء n وعدد طرق فعل شيء آخر m فإن عدد نواتج إجراء أحدهما يساوي $n + m$	بكم طريقة اختيار 4 كتب أو 3 أقلام ؟ الحل : باستخدام مبدأ العد $4 + 3 = 7$
مبدأ الضرب	إذا كان هناك n من الطرق لفعل شيء ما، و m من الطرق لفعل شيء آخر فإن عدد طرق فعلهما معًا $n \times m$	بكم طريقة يمكن تكوين رقم من ثلاث خانات إذا كان التكرار غير مسموح ؟ الحل : باستخدام مبدأ العد $3 \times 2 \times 1 = 6$
مبدأ التقابل	إذا كان هناك n طريقة لكل m تجربة، فإن عدد الطرق الممكنة لهذه التجارب هو n^m	بكم طريقة يمكن تكوين رقم من ثلاث خانات إذا كان التكرار مسموح ؟ الحل : باستخدام مبدأ العد $3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$

مبدأ عد الصفحات "للأعداد المحصورة بين عددين a و b ": عدد الأعداد الصحيحة x حيث $a < x < b$ يساوي:

$$x = (b - a) - 1$$

مبدأ عد الصفحات "للأعداد من a إلى b": عدد الأعداد الصحيحة x حيث $a \le x \le b$ يساوي:

$$x = (b - a) + 1$$

طرق العد

	باستعمال التباديل و التوافيق ((التكرار غير مسموح))	
	التعريف و القانون	**مثال**
	التوافيق ((الترتيب غير مهم))	
	تبديل n من العناصر مأخوذ منها r من العناصر حيث $(a,b)=(b,a)$ ، أي أن الترتيب غير مهم. $nCr=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$	بكم طريقة يمكن اختيار مجلس إدارة مكون من 3 أشخاص من بين 10 أشخاص ؟ الحل : الترتيب غير مهم $._{10}C_3=\frac{10!}{3!\,(10-3)!}=\frac{10\times9\times8\times7!}{3\times2\times1\times7!}=120$,
	التباديل ((الترتيب مهم))	
التباديل الخطية	تباديل عدد من العناصر n مأخوذة كلها هو $n!$	بكم طريقة يمكن أن يجلس 5 أشخاص على 5 كراسي في صف واحد؟ الحل: $n!=5!=5\times4\times3\times2\times1=120$
	تبديل n من العناصر مأخوذ منها r من العناصر: $nPr=\frac{n!}{(n-r)!}$ $=n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots\ldots(n-r+1)$	بكم طريقة يمكن أن عرض 3 مجلات من بين 10 مجلات مختلفة على رف؟ الحل: $._{10}P_3=10\times9\times8=720$
التباديل الدائرية	بمرجع: لعدد n من العناصر هو: $n!$	بكم طريقة يمكن أن يجلس أفراد عائلة من 5 أشخاص على طاولة مستديرة بحيث يكون الأب بجوار النافذة؟ الحل: تباديل دائرية بمرجع $n!=5!=5\times4\times3\times2\times1=120$
	بدون مرجع: لعدد n من العناصر هو: $(n-1)!$	بكم طريقة يمكن أن يجلس 5 أشخاص على طاولة مستديرة؟ الحل: تباديل دائرية بدون بمرجع $(n-1)!=4!=4\times3\times2\times1=24$
التباديل مع التكرار	إذا كان لدينا عدد عدد n من العناصر فيها عدد k من العناصر المتكررة. $r_1,r_2,r_3\ldots r_k$ حيث عدد تكرارات كل عنصر منها ، فإن عدد تباديل هذه العناصر هو $\frac{n!}{r_1!r_2!\ldots\ldots r_k!}$	بكم طريقة يمكن اختيار رمز بريدي واحد من الأرقام 2 ,7 , 5 , 9 , 7 ؟ الحل : الترتيب مهم و يوجد رقم متكرر $\frac{5!}{2!}=\frac{5\times4\times3\times2!}{2!}=60$

الحوادث و الاحتمالات

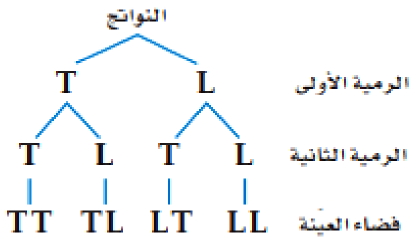
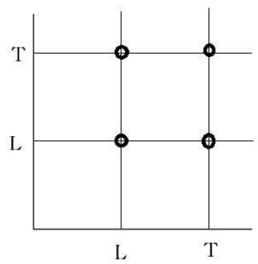
التجربة العشوائية

يقصد بها التجربة التي لا يمكن توقع مخرجاتها مع افتراض أن كل ناتج من نواتج هذه التجربة لها إمكانية الوقوع ذاتها..

فضاء العينة (S)

هو مجموعة جميع مخرجات تجربة عشوائية ويرمز لها بالرمز.

<table>
<tr><td colspan="2">طرق تمثيل فضاء العينة

مثال: ألقيت قطعة نقود مرتين، مثل فضاء العينة لهذه التجربة.</td></tr>
<tr><td>المجموعات</td><td>S= {(T, L), (T, T), (L, T), (L, L)}</td></tr>
<tr><td>الرسم الشجري</td><td>
</td></tr>
<tr><td>الشبكة</td><td>
</td></tr>
<tr><td>الجدول</td><td><table><tr><th>النواتج</th><th>شعار (L)</th><th>كتابة (T)</th></tr><tr><td>شعار (L)</td><td>L, L</td><td>L, T</td></tr><tr><td>كتابة (T)</td><td>T, L</td><td>T, T</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>القائمة المنظمة</td><td>L , L   T , L
L , T   T , T</td></tr>
</table>

الحوادث و الاحتمالات

الحادثة تسمى أي مجموعة جزئية من فضاء العينة حادثة.

أنواع الحوادث العشوائية

حادثة بسيطة

هي حادثة مكونة من عنصر واحد من فضاء العينة لتجربة عشوائية

مثل حادثة ظهور العدد ٥ عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة

حادثة مركبة

هي حادثة مكونة من أكثر عنصر واحد من فضاء العينة لتجربة عشوائية

مثل حادثة ظهور عدد زوجي أو اكبر من ٤ عند القاء حجر نرد مرة واحدة

حادثة مستحيلة

هي الحادثة التي لاتحوي أي عنصر من فضاء العينه لتجربة عشوائية

مثل حادثة ظهور العدد ٧ عند القاء حجر نرد مرة واحدة

حادثة مؤكدة

هي الحادثة التي تحوي جميع عناصر فضاء العينة لتجربة عشوائية

مثل حادثة ظهور عدد أكبر من صفر و أقل من ٧ عند القاء حجر نرد مرة واحدة

حساب احتمال وقوع حادثة

ليكن S فضاء العينة، و$E \subseteq S$ حادثة. يعرف احتمال وقوع الحادثة E ويرمز لذلك بالرمز $P(E)$ على أنه:

$P(E) = \frac{|E|}{|S|}$ حيث $|E|$ يرمز لعدد عناصر E و $|S|$ يرمز لعدد عناصر S.

مثال: عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة ما احتمال ظهور عدد فردي؟

الحل:

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ = فضاء العينة، 6= عدد عناصر فضاء العينة

نفرض A حادثة ظهور عدد فردي، $A = \{1, 3, 5\}$ ، $3 =$ عدد عناصر A

$$P(A) = \frac{3}{6} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

مسلمات أساسية للاحتمال

لتكن S فضاء العينة لتجربة عشوائية. عندئذ:

1. $P(A) \geq 0$ لكل حدث A
2. $P(S) = 1$
3. إذا كانت $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, An$ حوادث منفصلة مثنى مثنى فإن:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup An) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \ldots + P(An)$$

احتمالات الحوادث	
احتمال الحوادث المستقلة و الغير مستقلة احتمال وقوع حادثتين معاً الرابط (و) $P(A\cap B)$	**الحوادث المستقلة:** نقول عن حادثين A وB بأنهما مستقلتان إذا كان وقوع أحدهما أو عدم وقوعه لا يؤثر على احتمال وقوع أو عدم وقوع الآخر. "مثل مسائل السحب بإرجاع" ويحسب كما يلي: $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ مثال صندوق يحتوي على كرتين خضراء و 3 كرات بيضاء إذا سحبت عشوائياً كرتين على التوالي مع الإرجاع فما احتمال أن تكون كلا الكرتين بيضاء؟ الحل: الحوادث مستقلة لأن السحب مع الإرجاع $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$
	الحوادث غير المستقلة: نقول عن حادثين A وB بأنهما غير مستقلتين إذا كان وقوع أحدهما يؤثر على احتمال وقوع الآخر. "مثل مسائل السحب بدون إرجاع" ويحسب كما يلي: $P(A\cap B)=P(A).P(B\backslash A)$ مثال صندوق يحتوي على كرتين خضراء و 3 كرات بيضاء إذا سحبت عشوائياً كرتين على التوالي بدون الإرجاع فما احتمال أن تكون كلا الكرتين بيضاء؟ الحل: الحوادث غير مستقلة لأن السحب بدون إرجاع $P(A\cap B)=P(A)\times P(B\backslash A)\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$ حل آخر: $P=\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$
الاحتمال المشروط احتمال وقوع أحادثة بشرط وقوع الآخرى الرابط (إذا كان أو إذا علم) $P(A\backslash B)$	هو احتمال وقوع حادثة A بشرط وقوع حادثة أخرى B. أي أن فضاء العينة للحادثة A هو مجموعة جزئية من فضاء العينة للحادثة B. ويحسب كما يلي: $P(A\backslash B)=\frac{P(B\cap A)}{P(B)},P(B)\neq 0$ مثال إذا كان A,B حادثتان لتجربة عشوائية و كان $P(A\cap B)=\frac{1}{8}$ $,P(B)=\frac{3}{4}$ $P(A)=\frac{1}{4}$ فاوجد $P(A\backslash B)$ الحل: $P(A\backslash B)=\frac{P(B\cap A)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{6}$

الحوادث و الاحتمالات

<table>
<tr><th colspan="2">احتمالات الحوادث</th></tr>
<tr><td>

الحوادث المتنافية:

نقول عن حادثين A وB بأنهما متنافيان إذا كان وقوع أحدهما يمنع وقوع الآخر. (لا توجد نواتج مشتركة بين الحادثتين). ويحسب كما يلي:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال

عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة. ما احتمال ظهور العدد 3 أو 5؟

الحل: الحوادث متنافية نفرض أن A حادثة ظهور العدد 3 و B حادثة ظهور العدد 5

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

</td><td rowspan="2">

احتمال الحوادث المتنافية و الغير متنافية

احتمال وقوع إحدى الحادثتين على الأقل الرابط (أو) $P(A \cup B)$

</td></tr>
<tr><td>

الحوادث غير المتنافية:

نقول عن حادثين A B أنهما غير متنافيين إذا كان وقوع أحدهما لا يمنع وقوع الآخر. (توجد نواتج مشتركة بين الحادثتين) ويحسب كما يلي:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال

عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة. ما احتمال ظهور عدد فردي أو أولي؟

الحل: الحوادث غير متنافية

$\text{فردي} = A = \{1, 3, 5\}$ $\text{أولي} = B = \{2, 3, 5\}$

$$A \cap B = \{3, 5\}$$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

</td></tr>
<tr><td>

لأي حادثة A فإن احتمال حادثتها المتممة هو:

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

مثال

إذا كان احتمال هطول الأمطار 70% فما احتمال عدم هطولها؟

الحل:

$$P(A^C) = 1 - \frac{70}{100} = \frac{30}{100} = 30\%$$

</td><td>

احتمال الحادثة المتممة

احتمال عدم وقوع الحادثة

</td></tr>
</table>

الاحتمال الهندسي

الاحتمال الهندسي

هو الاحتمال الذي يصف فرصة وقوع نقطة على قطعة مستقيمة أو داخل منطقة. ويتم حساب احتمال الحدث في هذه الحالات باستخدام الأطوال أو المساحات أو الحجوم.

الأطوال

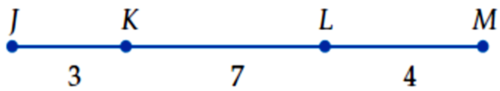
إذا اخترت نقطة E عشوائيا على المستقيم JM فإن:

$$P(E \in KL) = \frac{KL}{JM}$$

مثال

إذا اخترت نقطة x عشوائيا على JM فما احتمال أن تقع على LM

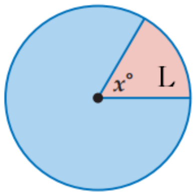
الحل:



$$P(x \in LM) = \frac{LM}{JM} = \frac{4}{3+7+4} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

القطاعات الدائرية

إذا اخترت نقطة M عشوائيا داخل الدائرة، فإن احتمال وقوعها داخل القطاع الدائري L يساوي:



$$P(M \in L) = \frac{x^\circ}{360^\circ}$$

حيث تمثل x زاوية القطاع الدائري.

مثال

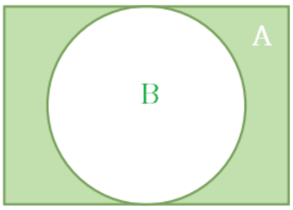
ما احتمال استقرار المؤشر على اللون الأصفر في القرص المجاور؟

الحل:

$$P(\text{الأصفر}) = \frac{45^\circ}{360^\circ} = 12.5\%$$

المساحات

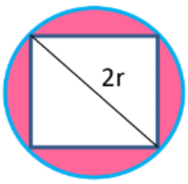
إذا احتوت المنطقة A منطقة أخرى B واخترت نقطة E عشوائيا في المنطقة A فإن احتمال وقوعها في B هو:



$$P(E \in B) = \frac{B \text{ مساحة المنطقة}}{A \text{ مساحة المنطقة}}$$

مثال

أطلق صياد بندقيته على الشكل المقابل. ما احتمال أن يصيب المنطقة المظللة؟



الحل:

احتمال إصابة الهدف = (مساحة الدائرة − مساحة المربع) ÷ مساحة الدائرة

$$P = \frac{\pi r^2 - \frac{2r \times 2r}{2}}{\pi r^2} \Rightarrow P = \frac{\pi r^2 - 2r^2}{\pi r^2} \Rightarrow P = \frac{r^2(\pi - 2)}{\pi r^2} \Rightarrow P = \frac{(\pi - 2)}{\pi} = 1 - \frac{2}{\pi}$$

التوزيعات الاحتمالية

<table>
<tr><td colspan="2">

التوزيعات الاحتمالية

يسمى المتغير الذي يأخذ مجموعة قيم لها احتمالات معلومة متغيرا عشوائيا. والمتغير العشوائي الذي له عدد محدود من القيم يسمى متغيرا منفصلا. بينما المتغير العشوائي الذي يأخذ أي قيمة من فترة الأعداد الحقيقية يسمى متغير عشوائي متصل.

</td></tr>
<tr><td>

شروط التوزيع الاحتمالي

</td><td>

هو دالة تربط بين كل قيمة من قيم المتغير العشوائي، مع احتمال وقوعها، ويعبر عنه بجدول أو معادلة، أو تمثيل بياني. ويجب أن يحقق التوزيع الاحتمالي الشرطين الآتيين:

- احتمال كل قيمة من قيم X محصور بين 0 و1، أي أن $0 \leq P(X) \leq 1$
- مجموع كل احتمالات قيم X يساوي 1، أي أن $\sum P(X) = 1$

مثال

ما قيمة a التي تجعل التوزيع المجاور توزيعاً احتمالياً؟

x	1	2	3
p(x)	a	0.8	0.1

الحل:

$$\sum P(X) = 1 \Rightarrow 0.1 + 0.8 + a = 1 \Rightarrow a = 1 - 0.9 = 0.1$$

</td></tr>
<tr><td rowspan="2">

أنواع التوزيع الاحتمالي

</td><td>

التوزيع الاحتمالي المتصل:

هو توزيع احتمالي متغيره العشوائي متصل مثل التوزيع الطبيعي

</td></tr>
<tr><td>

التوزيع الاحتمالي المنفصل:

هو توزيع احتمالي متغيره العشوائي منفصل مثل التوزيع ذي الحدين.

</td></tr>
<tr><td>

القيمة المتوقعة

</td><td>

هي المتوسط الموزون للقيم في التوزيع الاحتمالي المنفصل؛ أي أن القيمة المتوقعة $E(X)$ هي مجموع حواصل ضرب قيم المتغير العشوائي X في احتمال كل منها $(P(X))$. ويفيد حساب القيمة المتوقعة في الإخبار بما يمكن حدوثه على المدى البعيد بعد محاولات كثيرة.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} X_i \, . \, P(X_i)$$

مثال

ما القيمة المتوقعة للتوزيع الاحتمالي في الجدول المجاور ؟

x	1	2	3
p(x)	0.1	0.8	0.1

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=3} X_i \, . \, P(X_i) = 1 \times 0.1 + 2 \times 0.8 + 3 \times 0.1 = 2$$

</td></tr>
</table>

التركيبات

التوزيعات الاحتمالية

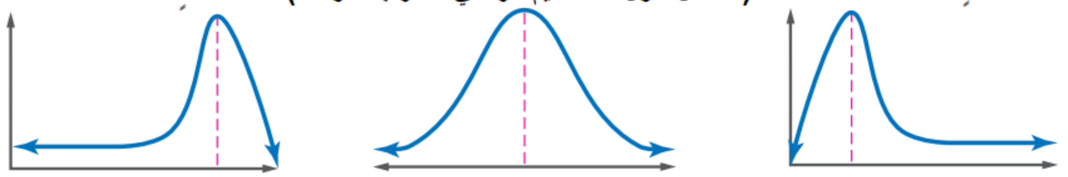
التوزيع الطبيعي

هو توزيع احتمالي متغيره العشوائي متصل، يمكن للنواتج أن تأخذ أي قيمة في فترة من الأعداد الحقيقية.

خصائص منحنى التوزيع الطبيعي

- التمثيل البياني له منحنى يشبه الجرس، ومتماثل حول المستقيم الرأسي المار بالمتوسط.
- يتساوى فيه المتوسط والوسيط والمنوال.
- المنحنى متصل.
- يقترب المنحنى من المحور x في جزأيه الموجب والسالب، ولكنه لا يمسه.

التواء موجب (ملتوٍ إلى اليمين) | التوزيع الطبيعي (متماثل حول المستقيم الرأسي المار بالمتوسط) | التواء سالب (ملتوٍ إلى اليسار)

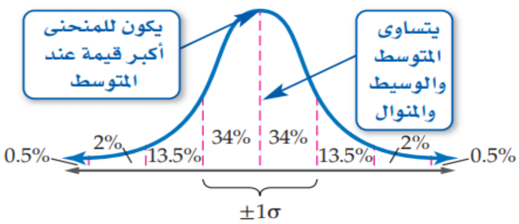


معظم البيانات تتركز في اليسار وقليل منها في اليمين. | المتوسط=الوسيط=المنوال | معظم البيانات تتركز في اليمين وقليل منها في اليسار.

حساب احتمالات التوزيع الطبيعي

ولحساب احتمالات التوزيع الطبيعي

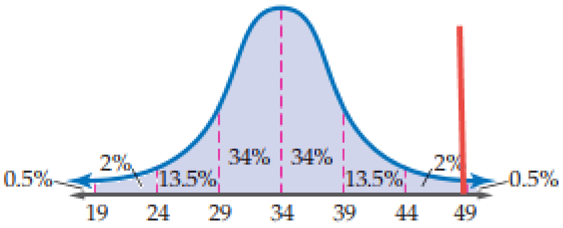
نستخدم القانون التجريبي:



حيث يمثل σ الانحراف المعياري للتوزيع الطبيعي.

مثال

إذا توزعت بيانات توزيعا طبيعيا بمتوسط مقداره 34 و انحراف معياري 5 فإن احتمال قيمة أقل من 49 تم اختيارها عشوائياً يساوي:



الحل:

نرسم منحنى التوزيع الطبيعي للبيانات ز منه نجد أن

$$P(X < 49) = 100\% - 0.5\% = 99.5\%$$

التوزيعات الاحتمالية

التوزيعات ذات الحدين

تجربة ذات الحدين هي تجربة احتمالية تحقق الشروط الآتية:

1) يعاد إجراء التجربة لعدد محدد (n) من المحاولات المستقلة.
2) كل محاولة لها فقط نتيجتان متوقعتان: نجاح S ، أو فشل F.
3) $P(S)$ "ويرمز له بالحرف P" هو نفسه في كل محاولة. واحتمال الفشل $P(F)$ "ويرمز له بالحرف q" هو نفسه في كل محاولة ويساوي $1-p$.

ويمثل المتغير العشوائي X عدد مرات النجاح في n من المحاولات. ولحساب احتمال ذات الحدين نستخدم الصيغة التالية:

$$P(X) = nC_X\, p^x\, q^{n-x} = \frac{n!}{(n-X)!X!} p^x\, q^{n-x}$$

حيث p احتمال النجاح، وq احتمال الفشل في المحاولة الواحدة.

مثال

كسب لاعب 50 % من مبارياته التي لعبها خلال مسيرته الرياضية ما احتمال أن يكسب 3 مباريات من بين 5 مباريات قادمة

الحل:

التجربة ذات حدين لأن الحوادث مستقلة و لها ناتجان فقط أما كسب أو خسارة

$$p = 0.5 \Rightarrow q = 1 - p = 1 - 0.5 = 0.5, n = 5, x = 3$$
$$P(X) = {}_nC_x p^x q^{n-x} \Rightarrow P(3) = {}_5C_3 (0.5)^3 (0.5)^2 = \frac{5}{16}$$

المراجع			
اسم الكتاب	المؤلف	دار النشر	تاريخ النشر
التحصيلي للتخصصات العلمية	ناصر بن عبدالعزيز بن ناصر العبد الكريم	دار الحرف	1439هـ
نظرية الأعداد	معروف عبدالرحمن سمحان ميساء بنت محمد القرشي اروى بنت محمد الأمين الشنقيطي	العبيكان	
مقدمة في نظرية الأعداد	أ.د فالح بن عمران بن محمد الدوسري		الطبعة الأولى 1415هـ - 2002م
مبادئ أساسية لأولمبياد الرياضيات	سلطان سعود البركاني		الطبعة الثانية 1434هـ 2013م
الخطوة الأولى إلى أولمبياد الرياضيات	د . طارق بن عامر آل سعدون الصيعري		الطبعة الأولى 1441هـ - 2020م

- سمحان، معروف عبدالرحمن و عبيد ، عبدالعزيز التركيبات. العبيكان للنشر. المملكة العربية السعودية. الرياض. (2015)
- ماجروهيل. رياضيات أول متوسط الفصل الدراسي الأول والثاني . وزارة التعليم ، مجموعة العبيكان للاستثمار. المملكة العربية السعودية. (2008)
- ماجروهيل. رياضيات ثاني متوسط الفصل الدراسي الأول والثاني . وزارة التعليم ، مجموعة العبيكان للاستثمار. المملكة العربية السعودية. (2008)
- ماجروهيل. رياضيات ثالث متوسط الفصل الدراسي الأول والثاني . وزارة التعليم ، مجموعة العبيكان للاستثمار. المملكة العربية السعودية. (2008)
- ماجروهيل. رياضيات 1. وزارة التعليم ، مجموعة العبيكان للاستثمار. المملكة العربية السعودية. (2008)
- ماجروهيل. رياضيات 2. وزارة التعليم ، مجموعة العبيكان للاستثمار. المملكة العربية السعودية. (2008)
- ماجروهيل. رياضيات 3. وزارة التعليم ، مجموعة العبيكان للاستثمار. المملكة العربية السعودية. (2008)
- ماجروهيل. رياضيات 4. وزارة التعليم ، مجموعة العبيكان للاستثمار. المملكة العربية السعودية. (2008)
- ماجروهيل. رياضيات 5. وزارة التعليم ، مجموعة العبيكان للاستثمار. المملكة العربية السعودية. (2008)
- ماجروهيل. رياضيات 6. وزارة التعليم ، مجموعة العبيكان للاستثمار. المملكة العربية السعودية. (2008)

Bain & Engelhardt. Introduction To Probability and Mathematical Statistics. BrookslCole. United States of America(1992)

Blitzer.Algebra& Trigonometry. Pearson Prentic Hall. United States of America (2004

المراجعون	
أ/ فوزية سعد عبدالله الشهراني	أ/ مريم عبداللطيف إبراهيم الهران
أ/ عبد الإله مردد رده الحارثي	أ/ بدر علي السحيباني
أ/ توفيق علي أحمد زكري	أ/ سامي محمد عبدالله المعيلي
أ/ إبراهيم علي المعيان	أ/ يحيى محمد موسى
أ/ عواطف محسن العتيبي	أ/ ماجدة حسن الحيزان
أ/ رفعه ناصر سعد العرجاني	

تنسيق
أ/ أحمد صالح مجيد الخلف
أ/ توفيق علي أحمد زكري
أ/ محمد علي أحمد الشواف

الفهرس

العودة إلى الأقسام اضغط هنا